广义度量空间与映射

(第二版)

林　寿 著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

空间与映射的分类设想是点集拓扑学的主要研究方向之一. 本书利用映射方法系统论述广义度量空间的基本理论, 总结了 20 世纪 60 年代以来空间与映射理论的重要研究成果, 特别包含了国内学者的研究工作, 内容包括广义度量空间的产生、度量空间的映象和广义度量空间类等 3 章和 2 个附录. 第 2 版在第 1 版的基础上, 对部分内容作了修饰, 补充了广义度量空间理论的若干新进展, 适当调整了附录和参考文献, 列举了一些尚未解决的问题供有兴趣的读者研究.

本书可以作为广义度量空间理论的学习或研究参考书, 可供大学数学系高年级学生、研究生及研究工作者使用.

序

关于广义度量空间理论的综合介绍,国外出版的Burke,Lutzer[75],Gruenhage[140]以及最近出版的“Topics in General Topology”[305] 中分别由Nagata[319],Tamano[371]撰写的二章都是比较优秀的, 值得一读. 本书的特点是用映射为工具阐述广义度量空间. 早在 1961 年 Alexandroff[3] 在第一次布拉格会议上提出用映射方法研究空间的设想. 1966 年 Arhangel'skiĭ[24] 的综合论文 “映射与空间” 继承、发展了这一设想. 我们对此感到莫大的兴趣. 曾由吴利生、陈必胜两位同志把这综合论文译为中文(原系俄文), 登载在《数学译林》(1981∼1982),希望引起国内同行们的兴趣.

关于用映射研究空间的内容大致有三点: ① 哪些特定的广义度量空间可以表示为度量空间在某些映射下的象或逆象. 例如 Morita[301] 为研究积空间的正规性而引入的 M 空间可以表示为度量空间在拟完备映射下的逆象, 从而为研究 M 空间开辟了新途径且使它与度量空间发生联系. ② 度量空间在某些映射下的象有哪些内在特征. 例如度量空间在闭映射下的象 (通常称为 Lašnev 空间) 被 Foged[112] 刻画为具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 T_3、Fréchet 空间. 从而可与 Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理 [74] 作比较, 且可与借助 k 网定义的某些广义度量空间 (如 $\aleph$ 空间) 取得联系. ③ 某些特定的广义度量空间在怎样的映射下保持不变. 以度量空间为例, 由 Hanai-Morita-Stone 定理 [304, 363] 知, 可度量化在完备映射下保持不变. 更进一步, Michael[285] 得到了可度量化在可数双商闭映射下保持不变, 显示了可数双商映射的魅力. 从上述三方面的简单的例子看来, 在广义度量空间的研究中渗入映射方法是多么丰富多采, 引人入胜.

该书作者尝试采用 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 的设想与方法, 以映射为工具阐述国际上 30 年来广义度量空间方面的有关内容, 特别是阐述了近年来国内学者在这方面的成果而写成本专著. 书中对上述设想与方法更有所发扬, 是一本饶有兴趣的科研读物. 本书可用作大学数学系高年级学生及研究生的选修课教材或教学参考书, 是一般拓扑学专业研究生的必读专著, 也可供数学工作者或其他科学工作者参考.

高国士

1992 年 9 月 1 日于苏州大学

第二版前言

本书最突出的特点是用映射方法系统论述广义度量空间理论, 引导读者系统和快速地进入学科的前沿, 开展科学研究工作. 第一版中 “作者希望通过本书, 使读者对映射的空间分类原则有所了解, 创造出更多优异的成果, 扩大我国一般拓扑学界在国际上的影响” 已取得成效. 第一版于 1995 年出版后, 在广义度量空间类和映射类方面均引起不少同行的关注, 如具有点可数覆盖的空间, k 半层空间, Σ 空间, $\aleph$ 空间, g 可度量空间和局部可分度量空间的映射, ss 映射, 紧覆盖映射, 紧映射, π 映射等, 都产生了丰富的结果.

近年来, 国内外有不少优秀的论述广义度量空间理论的著作或综述报告问世, 如 Arhangel'skiĭ[27], 高国士 [122], Gruenhage[142], Hodel[166], Nagata[320] 等, 尤其是 Hart, Nagata 和 Vaughan[149] 的 “Encyclopedia of General Topology”, 对一般拓扑学的各方向进行了较详细的描述. 然而, 本书仍凸显其关于空间与映射理论系统介绍的学术价值. 过去的 10 多年间, 空间与映射理论有了很大的发展, 本书中列举的若干问题得到了解决 (见 §3.10), 在使用中也发现了原书的一些错误. 为更好体现反映学科研究趋向、注重国内学者贡献的精神, 特出版经修订后的第二版.

第二版大致保持原有的篇幅, 尽量不与作者的《点可数覆盖与序列覆盖映射》[239] 内容交叉, 所以删除或简化了第一版中 “和定理”、“有限到一开映射”、“积空间的 k 空间性质” 及点可数覆盖等方面的论述, 附录 B 仅阐明广义度量空间理论的形成. 本书的修订和出版得到国家自然科学基金资助项目 “覆盖方法及其在粗糙集理论中的应用” (项目编号 10571151) 和漳州师范学院学术专著出版基金的支持. 过去的 10 年间, 不少同事在阅读第一版时提出了一系列建议, 其中的大部分被吸收在修订版中. 在此对他们及所有关心第二版出版的同志们, 尤其是南京大学师维学教授和漳州师范学院的拓扑学研究生们在文稿的编辑和排版上给予的帮助, 表示衷心的感谢.

作 者①

2006 年 6 月

①通信地址: 352100 福建省宁德市蕉城南路宁德师范高等专科学校数学研究所.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn.

第一版前言

1944 年 Dieudonné[95] 引进仿紧性的概念是一般拓扑学进入全盛期的显著标志. 1950 ~ 1951 年间建立的卓越的 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理 [53, 311, 354] 为全面探索度量性质带来了根本性的变化, 同时对广义度量性质的研究展示了光明的前景，对仿紧性及可度量性的深入工作揭开了广义度量空间理论的研究序幕.

1961 年 Alexandroff[3] 在布拉格 “一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系” 的国际学术会议上提出了用映射研究空间的设想, 即将各式各样的拓扑空间类通过映射类作为纽带将它们联结于一体, 通过映射与空间的关系反映拓扑空间论的研究框架与整体结构, 使映射成为揭示空间类之间的内部规律的强有力工具. 1966 年 Arhangel'skiĭ[24] 发表了历史性的文献 “映射与空间”, 对如何实施 Alexandroff 设想给出了一系列建设性的具体步骤, 开创了用映射研究空间的新纪元, 成为一般拓扑学蓬勃发展的里程碑. 从此, Alexandroff 设想变为一般拓扑学中一种必不可少的研究手段, 推动着一般拓扑学, 尤其是广义度量空间理论的迅猛发展. 总之, Alexandroff 的关于映射的空间分类原则的设想构成了一般拓扑学的重要组成部分 [4].

依照 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 思想, 用映射研究空间的主要内容是借助映射类建立度量空间类与具有特定拓扑性质的空间类之间的广泛联系, 研究度量空间类在各类映射下象的内在特征以及特定的空间类被怎样的映射保持. 这一框架决定了本书预期达到的目标: 全面描述度量空间类在各类映射下的特征, 建立某些重要的广义度量空间类的映射定理. 本书由 3 章及 2 个附录和 400 余篇文献组成. 第 1 章简要介绍广义度量空间类的一些基本概念, 其中包含这些空间类的基本运算性质和简单特征, 目的是为后两章阐述空间与映射的关系提供必要的准备. 第二章借助具有特定性质的集族, 同时通过基以及推广形成的一些概念, 展示度量空间类关于商映射, 伪开映射, 可数双商映射, 闭映射以及在附加纤维可分性或紧性等条件时这些映射的象或逆象的内在刻画. 第三章利用几类优美的特征建立由具有特定性质的基, 弱基, k 网, 网和 (mod$k$) 网等所确定的广义度量空间类, 如 M 空间类, g 可度量空间类, $\aleph$ 空间类, σ 空间类和 Σ 空间类的映射定理. 本书最后有 2 个附录, 一是便于读者了解正文中使用的一些覆盖性质的内容, 二是使读者加深对广义度量空间理论的全面认识, 特别是明确 Alexandroff 设想在一般拓扑学中所处

的位置.

本书的内容大都见于近 30 年来关于空间和映射研究的数百篇论文中. 作者力求通过广义度量空间类的映射定理指出, 映射的空间分类原则确实是一般拓扑学的带有决定性意义的研究模式, 并由此窥视空间与映射的全面联系. 同时注重取材的新颖与特色, 尽可能勾画出我国学者近年来取得的突出成就. 与通常的研究相比, 确定的可数双商映射和序列商映射的表达, 利用 cs^* 网讨论度量空间的各类商 s 映象, 对遗传闭包保持集族的系统阐述, 归纳和整理逆紧映射逆象的 G_δ 对角线定理, 闭映射的分解定理以及积空间 k 性质的研究等都是本书的特色.

映射与空间是一个庞大而前景广阔的课题. 作者希望通过本书, 使读者对映射的空间分类原则有所了解, 创造出更多优异的成果, 扩大我国一般拓扑学界在国际上的影响. 衷心感谢多年来一直给予作者关心、帮助的苏州大学、四川大学、广西大学、西北大学和山东大学等校的诸前辈和同事们, 如果说我在该领域有一点成绩的话, 那完全是由于他们的扶持与爱护的结果. 作者尤其深深感谢事业上的引路人、导师高国士教授①. 这不仅仅是由于高教授在空间与映射方面完成的出色工作和在国内积极推崇 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 思想 [123], 从而使作者坚定地从事本课题的工作, 而且更重要的是因为高教授自 1984 年以来呕心沥血的谆谆教诲、无私帮助和持续鼓励, 为作者奠定了学习、研究的基础, 指出了继续探索的方向以及不断工作的勇气和信心. 虽然本书由作者执笔完成, 但稍为感到宽慰的是在一定程度上反映了高教授的研究风格与学术思想.

本书原稿是作者 1991 年 9 月 ～ 1992 年 7 月在四川大学数学所作为访问学者时撰写的, 感谢蒋继光老师和刘应明老师给予的帮助与关心. 另外，如果没有国家自然科学基金优秀研究成果专著出版基金的资助, 本书是很难与读者见面的.

作　者

1993 年 4 月

①程民德主编. 中国现代数学家传 (第三卷). 南京: 江苏教育出版社, 1998, 287 ～ 297.

目　　录

第一章　广义度量空间的产生

度量空间理论在一般拓扑学的研究中占据核心位置, 作为其一般化产生了广义度量空间理论. Burke 和 Lutzer[75] 认为, 广义度量空间的起源主要来自三个方面, 一是度量化问题, 二是乘积空间的仿紧性问题, 三是映射与空间的相互分类问题. 什么是广义度量空间? 或许, 任何推广了可度量性的拓扑性质都可以称为广义度量性质. 然而, 这种说明过于空泛. 粗略地说, 广义度量空间是这样的一些空间类, 有益于刻画可度量性, 继承了度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类[140, 166]. Hodel[166] 指出: 有许多的理由说明为什么广义度量空间是值得研究的, 或许最重要的理由是这些空间类增加了人们对度量空间的理解; 此外, 拓扑学家正不断地寻找比度量空间更广泛的空间类, 使关于度量空间的一些特别重要的结果, 如 Katětov-Morita 维数定理, Dugundji 扩张定理, Borsuk 同伦扩张定理等, 在这些空间类上成立. 正因为如此, 从 20 世纪 60 年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向, 所涉及的与公理集合论、数理逻辑、组合数学、泛函分析、拓扑代数、动力系统、计算机科学等分支相互交融而形成的大量问题已列入问题集 "Open Problems in Topology"[291], "Open Problems in Topology II"[329] 和 "Problems from Topology Proceedings"[328]. 1960 – 2005 年间取得的广义度量空间理论的成就已总结在一些重要的论著中, 如 Arhangel'skiĭ[24]; Burke, Lutzer[75]; 高国士[122]; Gruenhage[140, 141, 142]; Hodel[166]; Kodama, Nagami[202]; 林寿[235, 239]; Morita, Nagata[305]; Nagata[320]. 许多学者不断提出大量有挑战性的问题, 汇同一些长期未解决的经典问题, 成为广义度量空间理论进一步向前发展的源泉. 恰如 Hodel[166] 在总结了广义度量空间理论的阶段性结果后说: "或许更重要的是, 广义度量空间的研究还不是完整的. 更确切地说, 随着每年许多新的重要成果的出现, 它还在不断地成长壮大."

本章从距离函数、基及其推广、广义可数紧性三个角度导出本书所论述的大部分广义度量空间类, 同时描述这些空间类的一些简单刻画、基本的运算性质 (如拓扑和性质, 遗传性质, 可积性质) 以及与其他一些空间类的粗略关系.

1.1 记号及术语

约定: 空间均指满足 T_2 分离公理的拓扑空间.

本节定义本书常用的一些记号和术语, 而后列举几个经典结果.

1.1.1 实数子集

以 $\mathbb{R}$ 表示实直线, $\omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{I}$ 和 $\mathbb{R}^+$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的自然数集, 正整数集, 有理数集, 无理数集, 单位闭区间和非负实数集. ω 也表示最小的无限序数. 记 $\mathbb{S}_1 = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. $\aleph_0, \mathbf{c}$ 分别表示 $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ 的基数; $\aleph_1$ 表示第一个不可数基数.

1.1.2 拓扑空间子集的运算

对空间 X, $\tau(X)$ 表示 X 的拓扑, $\tau^c(X)$ 表示 X 中闭集的全体. 在不引起混淆时, 分别记 $\tau(X)$ 和 $\tau^c(X)$ 为 τ 和 τ^c. 对 X 的子集 A 及 X 的子空间 (Y, τ') 的子集 Z,

$\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$ 表示 A 在 X 中的闭包;

A° 或 $\mathrm{int}(A)$ 表示 A 在 X 中的内部;

∂A 表示 A 在 X 中的边界;

A^d 表示 A 在 X 中的聚点的集合;

$\mathrm{cl}_Y(Z)$ 或 $\mathrm{cl}_{\tau'}(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的闭包;

$\mathrm{int}_Y(Z)$ 或 $\mathrm{int}_{\tau'}(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的内部.

1.1.3 拓扑空间的集族

对空间 X, 记

$\mathscr{K}(X) = \{K \subset X : K$ 是 X 的紧集 $\}$,

$\mathscr{S}(X) = \{S \subset X : S$ 是 X 的含极限点的收敛序列 $\}$,

其中非空有限集视为一确定的平凡收敛序列. X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为非平凡的, 若各 x_n 是互不相同的.

对 X 的集族 $\mathscr{P}$, 记

$\mathscr{P}^{<\omega} = \{\mathscr{F} \subset \mathscr{P} : \mathscr{F}$ 有限 $\}$;

$\mathscr{P}^F = \{\cup\mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}\}$;

$\cup\mathscr{P} = \cup\{P : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的并;

$\cap\mathscr{P} = \cap\{P : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的交;

$\mathscr{P}^- = \overline{\mathscr{P}} = \{\overline{P} : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的闭包;

$\mathscr{P}^\circ = \{P^\circ : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的内部;

$\bigoplus\mathscr{P} = \bigoplus\{P : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的拓扑和.

对 $A \subset X, x \in X$, 记

$(\mathscr{P})_A = \{P \in \mathscr{P} : P \cap A \neq \varnothing\}$, $(\mathscr{P})_x = (\mathscr{P})_{\{x\}}$;

$\mathrm{st}(A,\mathscr{P})=\cup(\mathscr{P})_A$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{P})=\cup(\mathscr{P})_x$;
$\mathrm{st}^{n+1}(A,\mathscr{P})=\mathrm{st}(\mathrm{st}^n(A,\mathscr{P}),\mathscr{P})$, $n\in\mathbb{N}$;
$\mathscr{P}_{|A}=\{P\cap A:P\in\mathscr{P}\}$.

若 $\mathscr{F}$ 也是 X 的集族, 记 $\mathscr{P}\wedge\mathscr{F}=\{P\cap F:P\in\mathscr{P},F\in\mathscr{F}\}$. 同理可定义 $\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{P}_\alpha$.

1.1.4 空间上的映射

设 X,Y 是空间, $f:X\to Y$.

对 $A\subset X$, f 在 A 处的限制 $f_{|A}:A\to f(A)$ 定义为对 $x\in A, f_{|A}(x)=f(x)$.

对 $B\subset Y, f$ 在 B 处的限制 $f_B=f_{|f^{-1}(B)}$.

若 $\mathscr{P}$ 是 X 的集族, 则 $f(\mathscr{P})=\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 关于 f 的象.

若 $\mathscr{F}$ 是 Y 的集族, 则 $f^{-1}(\mathscr{F})=\{f^{-1}(F):F\in\mathscr{F}\}$, $\mathscr{F}$ 关于 f 的逆象或原象.

对空间 X,Y,Z 和 W, 若 $f:X\to Y$, $g:X\to Z$, $h:W\to Z$, 对角线映射 $f\triangle g:X\to Y\times Z$ 和乘积映射 $f\times h:X\times W\to Y\times Z$ 分别定义为 $(f\triangle g)(x)=(f(x),g(x))$ 和 $(f\times h)(x,w)=(f(x),h(w))$. 可类似定义 $\triangle_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha:X\to\prod_{\alpha\in\Gamma}Y_\alpha$ 和 $\prod_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha:\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in\Gamma}Y_\alpha$.

id_X 表示空间 X 到 X 的恒同映射.

对积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 及 $\beta\in\Gamma$, 以 $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha\to X_\beta$ 表示 $\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 在第 β 个坐标空间 X_β 上的投影映射.

1.1.5 空间的运算

设 Φ 是一拓扑性质.

(1) Φ 称为可加的, 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族, 则拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 具有性质 Φ.

(2) Φ 称为遗传的 (开遗传的, 闭遗传的), 若空间 X 具有性质 Φ, 则 X 的每一子空间 (开子空间, 闭子空间) 也具有性质 Φ.

(3) Φ 称为可积的 (有限可积的, 可数可积的), 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族 (且 Λ 是有限集, Λ 是可数集), 则积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 也具有性质 Φ.

(4) Φ 称为被映射类 $\mathscr{L}$ 保持 (逆保持), 若满映射 $f:X\to Y$, 其中 $f\in\mathscr{L}$ 且空间 X (空间 Y) 具有性质 Φ, 则空间 Y (空间 X) 也具有性质 Φ.

为了叙述方便起见, 术语 "Φ 空间"、"Φ 性质" 或 "Φ 空间性质" 将表示同一含意交换使用.

1.1.6 几个经典结果

本段列举以后各节要使用的一般拓扑学中的几个经典引理或定理以备查 [101].

(1) Zermelo *良序定理*. 任何集合可按某个线性序成为良序集.

(2) 连续统假设. $\mathbf{c} = \aleph_1$ (简记为 CH).

(3) Urysohn 度量化定理. 具有可数基的正则空间可嵌入 Hilbert 方体 $\mathbb{I}^{\aleph_0}$, 因而是可度量空间.

(4) Urysohn 引理. X 是正规空间当且仅当对 X 中不相交的闭集 A, B, 存在连续函数 $f : X \to \mathbb{I}$, 使 $f(A) \subset \{0\}$ 且 $f(B) \subset \{1\}$.

(5) Tietze 扩张定理. 一个空间是正规空间当且仅当定义于它的闭子空间上的实值连续函数可连续地扩张到整个空间上.

(6) Tychonoff 积定理. 紧空间族的积空间是紧空间.

(7) Tychonoff 紧扩张定理. 一个空间是完全正则空间当且仅当它存在紧扩张.

(8) Baire 范畴定理. $\mathbb{R}$ 是第二范畴集, 即 $\mathbb{R}$ 中可数个开稠集之交集是 $\mathbb{R}$ 的稠子集, 从而 $\mathbb{R}$ 不是可数个具有空内部的闭集之并.

(9) 对角线引理. 设连续函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 分离空间 X 的点与闭集, 其中 $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. 则对角线函数 $\Delta_{\alpha\in\Lambda} : X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ 是嵌入, 即 $\Delta_{\alpha\in\Lambda} : X \to \Delta_{\alpha\in\Lambda}(X)$ 是同胚映射.

1.2　距 离 函 数

度量空间最易为数学工作者接受的原因之一是其上存在度量. 对距离公理进行一般化是产生广义度量空间最直接的途径. 本节从距离函数出发引出度量空间, 对称度量空间, 半度量空间以及相关的可展空间, 拟可展空间的概念, 证明 Stone 定理.

定义 1.2.1　d 称为集合 X 的距离 (伪距离), 若 $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ 且对任意的 $x, y, z \in X$, 下述条件成立:

(1) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ $(d(x, x) = 0)$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

对 $A, B \subset X, x \in X$, 置

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\};$$
$$d(x, B) = d(B, x) = d(\{x\}, B).$$

对正数 ε, 令

$$\mathrm{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

X 称为度量空间 (伪度量空间), 若 X 是以 $\{\mathrm{B}(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ 为基生成的拓扑空间. 这拓扑也称为由 d 生成的拓扑. 若 X 的拓扑可由其距离 d 生成, X 称为可度量空间, d 称为 X 的度量.

设 $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是度量空间族. 记 $X=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, 定义 $d: X\times X\to\mathbb{R}^+$ 如下:

$$d(x,y)=\begin{cases}\min\{d_\alpha(x,y),1\}, & \text{存在 } \alpha\in\Lambda,\text{ 使 } x,y\in X_\alpha,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 (X,d) 是度量空间, d 称为标准的拓扑和度量.

度量空间是数学研究的一般对象, 具有良好的性质, 如可度量性是可加性, 遗传性和可数可积性. 度量空间理论中最深刻、最重要、最优美的结果是 Stone 定理.

定义 1.2.2[53] 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为离散的, 若对 $x\in X$, 存在 x 在 X 的邻域 V, 使 V 与 $\mathscr{P}$ 中至多一个元相交.

可数个离散集族之并称为 σ 离散集族. 一般地, 设 Φ 是一集族性质, 可数个具有性质 Φ 的集族之并称为 σ-Φ 集族.

定理 1.2.3[362] (Stone 定理) 度量空间是仿紧空间.

证明 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是度量空间 (X,d) 的开覆盖. 对 $\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}$, 置

(3.1) $U_{\alpha n}=\{x\in X:\mathrm{B}(x,1/2^n)\subset U_\alpha\}$.

则 $U_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_{\alpha n}$, 并且 $x\in U_{\alpha n}$ 当且仅当 $d(x,X-U_\alpha)\geqslant 1/2^n$. 于是

(3.2) 若 $x\in U_{\alpha n}, y\notin U_{\alpha n+1}$, 则 $d(x,y)>1/2^{n+1}$.

由 Zermelo 良序定理, 把指标集 Λ 良序化. 置

(3.3) $U^*_{\alpha n}=U_{\alpha n}-\bigcup_{\gamma<\alpha}U_{\gamma n+1}, \alpha\in\Lambda$.

则对 $\alpha\neq\beta\in\Lambda$, 按 $\alpha<\beta$ 或 $\beta<\alpha$, 由 (3.3) 可得

(3.4) $U^*_{\beta n}\subset X-U_{\alpha n+1}$ 或 $U^*_{\alpha n}\subset X-U_{\beta n+1}$.

若 $x\in U^*_{\alpha n}, y\in U^*_{\beta n}$, 由 (3.3) 和 (3.4), 则当 $\alpha<\beta$ 时, $x\in U_{\alpha n}, y\notin U_{\alpha n+1}$; 当 $\beta<\alpha$ 时, $y\in U_{\beta n}, x\notin U_{\beta n+1}$. 所以由 (3.2) 总有 $d(x,y)>1/2^{n+1}$, 即

(3.5) $d(U^*_{\alpha n},U^*_{\beta n})\geqslant 1/2^{n+1}$.

对 $x\in X$, 在 Λ 中存在最小的 α, 使 $x\in U_\alpha$, 于是存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $x\in U_{\alpha n}$, 由 (3.3), $x\in U^*_{\alpha n}$. 这表明

(3.6) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}U^*_{\alpha n}=X$.

对 $\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}$, 置

(3.7) $U^+_{\alpha n}=\{x\in X:d(x,U^*_{\alpha n})<1/2^{n+3}\}$.

则

(3.8) $U^*_{\alpha n}\subset U^+_{\alpha n}\subset U_\alpha$.

由 (3.5), (3.7) 及三角不等式, 易证对 $\alpha\neq\beta\in\Lambda$, $d(U^+_{\alpha n},U^+_{\beta n})\geqslant 1/2^{n+2}$. 于是对 $x\in X$, $\mathrm{B}(x,1/2^{n+3})$ 至多与 $\{U^+_{\alpha n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中的一个元相交, 所以 $\{U^+_{\alpha n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X

的离散开集族. 至此, $\{U^+_{\alpha n}\}_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的 σ 离散开加细. 故 X 是仿紧空间.

定义 1.2.4[7] 对集合 X, 函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}^+$ 称为 X 的对称距离, 若对 $x,y\in X$, 下述条件成立:

(1) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

空间 X 称为对称度量空间, 如果存在 X 的对称距离 d, 满足 $U\in\tau(X)$ 当且仅当对 $x\in U$, 存在 $\varepsilon>0$, 使 $\mathrm{B}(x,\varepsilon)\subset U$. 这时 d 称为 X 的对称度量.

若 d 是 X 的对称距离, 那么 (X,d) 是对称度量空间当且仅当 d 满足: $A\subset X$ 是 X 的闭集的充要条件是对 $x\in X-A$, $d(x,A)>0$. 易验证, 对称度量性是可加性, 开遗传性和闭遗传性.

定义 1.2.5[396] 设 d 是 X 的对称距离. d 称为 X 的半度量, 若 (X,d) 是对称度量空间, 并且对 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$, $x\in\mathrm{B}(x,\varepsilon)^\circ$. 这时 (X,d) 称为半度量空间.

若 d 是 X 的对称距离, 那么 (X,d) 是半度量空间当且仅当 d 满足: 对 $A\subset X, x\in\overline{A}$ 的充要条件是 $d(x,A)=0$. 易验证, 半度量性是可加性和遗传性.

定义 1.2.6 设 X 是空间.

(1) 称 X 为 Fréchet 空间 (或 Fréchet-Urysohn 空间) [115], 如果 $x\in\overline{A}\subset X$, 则存在 A 的序列在 X 中收敛于 x;

(2) 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 称为 X 的 g 函数 [150] (或递减 g 函数 [407]), 如果对 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$, $x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$. 如未特别说明, g 函数均用 g 表示. 对 $A\subset X$, 记 $g(n,A)=\bigcup_{x\in A}g(n,x)$;

(3) 称 X 具有半展开 [1], 如果存在 X 的覆盖列 $\{\mathscr{F}_n\}$ 满足:

对 $x\in X, \{\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 的邻域基. 这时 $\{\mathscr{F}_n\}$ 称为 X 的半展开.

定理 1.2.7 下述条件等价:

(1) X 是半度量空间;

(2) X 存在半度量函数 [150], 即 X 具有 g 函数满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\in g(n,x)$ 或 $x\in g(n,x_n)$, 则 $x_n\to x$;

(3) X 具有半展开 [1];

(4) X 是第一可数 (Fréchet) 的对称度量空间 [24].

证明 (1) ⇒ (3). 设 (X,d) 是半度量空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{F}_n=\{A\subset X:\mathrm{diam}A<1/n\},$$

其中 $\mathrm{diam}A=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$. 若 $x\in X$, 则 $\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)=\mathrm{B}(x,1/n)$. 所以 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的邻域基.

(3) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的半展开, 不妨设 $\mathscr{F}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{F}_n$. 定义 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$, 使 $g(n,x)=\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)^\circ$. 则 g 是 X 的半度量函数.

(2) $\Rightarrow$ (4). 设 g 是 X 的半度量函数. 显然, X 是第一可数空间. 对 $x\neq y\in X$, 置

$$m(x,y)=\min\{n\in\mathbb{N}:y\notin g(n,x),x\notin g(n,y)\}.$$

定义 $d:X\times X\to\mathbb{R}^+$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1/m(x,y), & x\neq y.\end{cases}$$

则 d 是 X 的半度量.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 Fréchet 空间 X 具有对称度量 d. 对 $A\subset X$, 若 $x\in\overline{A}-A$, 存在 A 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 如果 $d(x_n,x)\nrightarrow 0$, 那么存在 $\{x_n\}$ 的子列 Z, 使 $d(x,Z)>0$. 令 $T=Z\cup\{x\}$. 则 T 是 X 的闭子空间, 于是 (T,d) 是对称度量空间. 从而 x 是 T 的孤立点, 矛盾. 因而 $d(x_n,x)\to 0$, 故 $d(x,A)=0$.

推论 1.2.8 半度量性质是可数可积性.

证明 对 $n\in\mathbb{N}$, 设 g_n 是空间 X_n 的半度量函数. 置 $g:\mathbb{N}\times(\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n)\to\tau(\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n)$, 使 $g(m,x)=(\prod_{n\leqslant m}g_n(m,x_n))\times\prod_{n>m}X_n$, 其中 $x=(x_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$. 则 g 是 $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 的半度量函数.

定义 1.2.9 空间 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的展开, 若它是 X 的半展开. 具有展开的空间称为可展空间 [8]. 正则的可展空间称为 Moore 空间 [298]. X 的开集列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的拟展开 [47], 若对 $x\in U\in\tau$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $x\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$. 具有拟展开的空间称为拟可展空间.

每一闭集是 G_δ 集的空间称为 perfect 空间.

定理 1.2.10 下述条件等价:

(1) X 是可展空间;

(2) X 存在可展函数 [150], 即 X 具有 g 函数满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 若 $\{x,x_n\}\subset g(n,y_n)$, 则 $x_n\to x$;

(3) X 是 perfect 的拟可展空间 [47].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的展开. 对 $x\in X,n\in\mathbb{N}$, 取定 $U_n\in\mathscr{U}_n$, 使 $x\in U_n$, 置 $g(n,x)=\bigcap_{i\leqslant n}U_i$. 则 g 是 X 的可展函数.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 g 是 X 的可展函数. 对 X 的闭集 A, $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}g(n,A)$, 所以 X 是 perfect. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n=\{g(n,x):x\in X\}$. 则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的展开.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 perfect 空间 X 的拟展开. 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 X 的闭集列 $\{F_{nj}\}$, 使 $\cup\mathscr{U}_n=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}F_{nj}$. 令 $\mathscr{H}_{nj}=\mathscr{U}_n\cup\{X-F_{nj}\}$. 则 $\{\mathscr{H}_{nj}\}$ 是 X 的展开.

可展性或拟可展性都是可加性, 遗传性和可数可积性. 可展空间是半度量的次仿紧空间 (见附录 A 定理 3.3). 下述定理给出半度量空间是可展空间的一个简单的充分条件. 称空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 是点可数的, 若 X 的每一点仅属于 $\mathscr{B}$ 中可数个元.

定理 1.2.11[152] 具有点可数基的半度量空间是可展空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是半度量空间 X 的点可数基, $(X, \leqslant)$ 是良序集. 对 $x \in X$, 记 $(\mathscr{U})_x = \{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$; 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$
\begin{aligned}
&V_n(x) = \mathrm{B}(x, 1/n)^{\circ},\\
&h(n,x) = U_n(x) \cap V_n(x),\\
&p(n,x) = \min\{y \in X : x \in h(n,y)\},\\
&g(n,x) = V_n(x) \cap (\cap\{h(i,p(i,x)) : i \leqslant n\})\\
&\qquad\qquad \cap(\cap\{U_j(p(i,x)) : j, i \leqslant n,\ x \in U_j(p(i,x))\}),\\
&\mathscr{G}_n = \{g(n,x) : x \in X\}.
\end{aligned}
$$

则 $\{\mathscr{G}_n\}$ 是 X 的展开. 若不然, 存在 $x \in X$ 及 x 的开邻域 W, 使对 $i \in \mathbb{N}$ 有 $x_i \in X$ 满足 $x \in g(i, x_i) \not\subset W$. 由于 $x \in V_i(x_i)$, 所以 $x_i \to x$. 选取 $l, m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{B}(x, 1/l) \subset U_m(x) \subset W$. 若对 $y \in X$ 有 $x \in h(l, y) \subset V_l(y)$, 那么 $y \in \mathrm{B}(x, 1/l) \subset U_m(x)$, 于是 $p(l,x) \in U_m(x)$, 从而有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $U_m(x) = U_k(p(l,x))$. 因为 $U_k(p(l,x)) \cap h(l, p(l,x))$ 是 x 的开邻域, 存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使当 $i \geqslant i_0$ 时, $x_i \in U_k(p(l,x)) \cap h(l, p(l,x))$, 因而当 $i \geqslant i_0$ 时, $p(l, x_i) \leqslant p(l,x)$. 另一方面, 若 $i \geqslant l$, 则 $x \in g(i, x_i) \subset h(l, p(l, x_i))$, 那么 $p(l,x) \leqslant p(l,x_i)$. 故当 $i \geqslant \max\{i_0, l\}$ 时, $p(l,x_i) = p(l,x)$, 这时 $x_i \in U_k(p(l,x_i))$, 于是当 $i \geqslant \max\{i_0, l, k\}$ 时, $g(i, x_i) \subset U_k(p(l,x_i)) = U_k(p(l,x)) = U_m(x) \subset W$, 矛盾. 所以 X 是可展空间.

1.3 基

度量空间及拓扑空间概念提出后产生的一般性问题是寻求空间的度量化定理, 即对可度量空间给出内在刻画. 这一问题在 20 世纪 50 年代得到完满的解决.

定义 1.3.1 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为在 $x \in X$ 是局部有限 (离散) 的 [5, 53], 若存在 x 的邻域 V, 使 V 与 $\mathscr{P}$ 中至多有限个 (一个) 元相交. 若 $\mathscr{P}$ 在 X 的每一点是局部有限 (离散) 的, 则称 $\mathscr{P}$ 在 X 是局部有限 (离散) 的.

继 Stone 定理之后, Bing, Nagata 和 Smirnov 得到了经典的度量化定理.

定理 1.3.2 (Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理) 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是可度量空间;

(2) X 具有 σ 离散基 [53];

(3) X 具有 σ 局部有限基 [311, 354].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 (X,d) 是度量空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{B}_n=\{\mathrm{B}(x,1/2^n)\}_{x\in X}$. 则 $\mathrm{st}(x,\mathscr{B}_n)\subset\mathrm{B}(x,1/n)$. 由 Stone 定理 (定理 1.2.3), $\mathscr{B}_n$ 具有 σ 离散开加细 $\mathscr{V}_n$. 则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$ 是 X 的 σ 离散基.

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的, 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 具有 σ 局部有限基 $\mathscr{B}$. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 置 $\mathscr{V}=\{B\in\mathscr{B}:\text{ 存在 }U\in\mathscr{U},\text{ 使 }B\subset U\}$. 则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限开加细. 故 X 是仿紧空间, 从而 X 是正规空间.

记 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的. 对 $n,m\in\mathbb{N}$, $B\in\mathscr{B}_n$, 置

$$B_0=\cup\{A\in\mathscr{B}_m:\overline{A}\subset B\}.$$

则 $\overline{B}_0\subset B$. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $f_B:X\to\mathbb{I}$, 使 $f_B(\overline{B}_0)\subset\{1\}$ 且 $f_B(X-B)\subset\{0\}$. 对 $x,y\in X$, 定义

$$d_{nm}(x,y)=\min\{1,\sum_{B\in\mathscr{B}_n}|f_B(x)-f_B(y)|\}.$$

则 d_{nm} 是 X 的伪距离. 重排 $\{d_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ 为 $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. 再定义 $\rho:X\times X\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k(x,y)}{2^k}.$$

则 ρ 是 X 的距离, 且由 ρ 生成的 X 的度量拓扑就是 X 的拓扑, 所以 X 是可度量空间.

定理 1.3.2 的 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 称为 Bing 度量化定理, (1) $\Leftrightarrow$ (3) 称为 Nagata-Smirnov 度量化定理. 由此可得到进一步的度量化定理.

定义 1.3.3[54] 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为紧有限的, 若对 $K\in\mathscr{K}(X)$, $(\mathscr{P})_K$ 是有限的.

显然, 局部有限集族 $\Rightarrow$ 紧有限集族 $\Rightarrow$ 点有限集族.

推论 1.3.4[54] X 是可度量空间当且仅当 X 是具有 σ 紧有限基的正则空间.

证明 只需证充分性. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 紧有限基. 记 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是紧有限的. 断言: $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的. 事实上, 对 $x\in X$, 记 $(\mathscr{B})_x=\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 令 $P_k=\bigcap_{i\leqslant k}B_i$. 对 $n,k\in\mathbb{N}$, 若 $\mathscr{B}_n$ 在 x 不是局部有限的, 那么 $(\mathscr{B}_n)_{P_k}$ 是无限的, 从而存在 $\mathscr{B}_n$ 的无限集 $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 X 的序列 $\{x_k\}$, 使 $x_k\in P_k\cap Q_k$. 令 $F=\{x\}\cup\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$. 则 F 是 X 的紧集, 这与 $\mathscr{B}_n$ 的紧有限性相矛盾. 故 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 局部有限基, 从而 X 是可度量空间.

定理 1.3.5 下述条件等价:

(1) X 是可度量空间;

(2) X 存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使对 $x \in X, \{\mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 的邻域基[299]；

(3) X 存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使对 $K \in \mathscr{K}(X), \{\mathrm{st}(K, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 的邻域基 [187]；

(4) X 存在展开 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$[388]；

(5) X 是集态正规的可展空间 [53]. (Bing 度量化准则)

证明　(1) ⇒ (2), (3), (4). 设 X 是度量空间. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{U}_n = \{U \in \tau(X) : \mathrm{diam} U < 1/2^n\}.$$

则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足条件 (2), (3). 因为 X 是仿紧空间, 取 $\mathscr{H}_1 = \mathscr{U}_1, \mathscr{H}_{n+1}$ 是 $\mathscr{U}_{n+1} \wedge (\bigwedge_{i\leqslant n} \mathscr{H}_i)$ 的开星加细, 则 $\{\mathscr{H}_n\}$ 满足 (4).

(4) ⇒ (2). 利用若 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$, 则 $\mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_{n+1}) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$.

(3) ⇒ (2)①. 不妨设 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$, 且存在 $x \in U \in \tau$, 使每一 $\mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n) \not\subset U$. 取 $x_n \in \mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n) - U$, 则存在 $y_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$, 使 $x_n \in \mathrm{st}(y_n, \mathscr{U}_n)$, 那么 $y_n \to x$. 不妨设所有 $y_n \in U$. 让 $K = \{x\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. 则 $K \in \mathscr{K}(X)$, 从而存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(K, \mathscr{U}_m) \subset U$, 于是 $x_m \in U$, 矛盾.

(2) ⇒ (5). 不妨设 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 显然, X 是可展空间. 设 $\mathscr{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散闭集族. 对 $\alpha \in \Lambda, x \in H_\alpha$, 存在 $n(x) \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_{n(x)}) \subset X - \cup\{H_\beta : \alpha \neq \beta \in \Lambda\}$. 令 $U_\alpha = \bigcup_{x\in H_\alpha} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n(x)})$, 那么 $H_\alpha \subset U_\alpha \in \tau$ 且 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是互不相交集族. 因而 X 是集态正规空间.

(5) ⇒ (1). 让 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是集态正规空间 X 的展开. 由 X 的次仿紧性, $\mathscr{U}_n$ 具有闭加细 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{nm}$, 其中 $\mathscr{F}_{nm}$ 是 X 的离散闭集族. 因为 X 是集态正规空间, 设 $\mathscr{B}_{nm} = \{B_F : F \in \mathscr{F}_{nm}\}$ 是 X 的离散开集族且满足: 对 $F \in \mathscr{F}_{nm}$ 有 $U \in \mathscr{U}_n$, 使 $F \subset B_F \subset U$. 那么 $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_{nm}$ 是 X 的 σ 离散基. 因而 X 是可度量空间.

定义 1.3.6　(1) 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为在 $x \in X$ 是闭包保持的, 若对 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$, 如果 $x \in \overline{\cup\mathscr{P}'}$, 则 $x \in \cup\overline{\mathscr{P}'}$. 对 $A \subset X$, 如果 $\mathscr{P}$ 在 A 的每一点是闭包保持的, 则称 $\mathscr{P}$ 在 A 是闭包保持的 [275]. 具有 σ 闭包保持基的正则空间称为 M_1 空间 [79]；

(2)　X 的集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的拟基, 如果对 $x \in U \in \tau$, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B^\circ \subset B \subset U$. 具有 σ 闭包保持拟基的正则空间称为 M_2 空间 [79]；

(3)　X 的集对族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的对基, 若 $\mathscr{P}$ 满足:

(i) $(P_1, P_2) \in \mathscr{P} \Rightarrow P_1 \subset P_2$ 且 $P_1 \in \tau$.

(ii) 对 $x \in U \in \tau$, 存在 $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P_1 \subset P_2 \subset U$.

X 的集对族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的垫状族 [276], 若对 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$, $\overline{\cup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}'\}} \subset$

①对空间 X 证明命题 $A \Rightarrow B$, 有时直接假设 X 满足 A 的条件, 以后不再说明.

$\cup\{P_2:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}'\}$. 具有 σ 垫状基的空间称为 M_3 空间 [79].

σ 垫状基常称为 σ 垫状对基. 由于垫状族是集对族, 本书改称为 σ 垫状基. 书中其他涉及垫状族处同样对待.

M_1 空间, M_2 空间和 M_3 空间统称为 M_i 空间 [79]. 易见, 度量空间 $\Rightarrow$ M_1 空间 $\Rightarrow$ M_2 空间 $\Rightarrow$ M_3 空间 $\Rightarrow$ 仿紧空间. 下面讨论 M_i 空间的一些运算性质. 显然, M_i 性质是可加性.

命题 1.3.7 (1) M_1 性质是开遗传性;

(2) M_2 或 M_3 性质是遗传性.

证明 (1) 设 $\mathscr{B}$ 是 M_1 空间 X 的 σ 闭包保持基. 若 Z 是 X 的开子空间, 则 $\{B\in\mathscr{B}:\overline{B}\subset Z\}$ 是 Z 的 σ 闭包保持基, 所以 Z 是 M_1 空间.

(2) 仅对 M_2 性质进行证明. 设 $\mathscr{B}$ 是 M_2 空间 X 的 σ 闭包保持拟基. 若 Z 是 X 的子空间, 那么 $\overline{\mathscr{B}}_{|Z}$ 是 Z 的 σ 闭包保持拟基, 故 Z 是 M_2 空间.

对空间 X 的集族 $\mathscr{P}_1$ 和空间 Y 的集族 $\mathscr{P}_2$, 置

$$\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2=\{P_1\times P_2:P_1\in\mathscr{P}_1,P_2\in\mathscr{P}_2\}.$$

对 X 的集对族 $\mathscr{P}_1$ 和 Y 的集对族 $\mathscr{P}_2$, 置

$$\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2=\{(P_1\times P_2,Q_1\times Q_2):(P_i,Q_i)\in\mathscr{P}_i,i=1,2\}.$$

类似可定义 $\prod_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{P}_\alpha$.

引理 1.3.8 对 $i=1,2$, 若 $\mathscr{P}_i$ 是空间 X_i 的局部有限集族 (闭包保持集族, 垫状族), 那么 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 是空间 $X_1\times X_2$ 的局部有限集族 (闭包保持集族, 垫状族).

证明 仅证明闭包保持集族的情形. 设 $\mathscr{P}_1=\{F_\alpha\}_{\alpha\in A},\mathscr{P}_2=\{H_\beta\}_{\beta\in B}$. 对 $C\subset A\times B$, 要证明 $\overline{\cup\{F_\alpha\times H_\beta:(\alpha,\beta)\in C\}}\subset\cup\{\overline{F}_\alpha\times\overline{H}_\beta:(\alpha,\beta)\in C\}$. 设 $(x,y)\in X_1\times X_2-\cup\{\overline{F}_\alpha\times\overline{H}_\beta:(\alpha,\beta)\in C\}$. 置

$$U=X_1-\cup\{\overline{F}_\alpha:x\in X_1-\overline{F}_\alpha,(\alpha,\beta)\in C\},$$
$$V=X_2-\cup\{\overline{H}_\beta:y\in X_2-\overline{H}_\beta,(\alpha,\beta)\in C\}.$$

则 $(x,y)\in U\times V\in\tau(X_1\times X_2)$ 且 $(U\times V)\cap(\cup\{F_\alpha\times H_\beta:(\alpha,\beta)\in C\})=\varnothing$, 于是 $(x,y)\notin\overline{\cup\{F_\alpha\times H_\beta:(\alpha,\beta)\in C\}}$. 因此 $\mathscr{P}_1\times\mathscr{P}_2$ 是 $X_1\times X_2$ 的闭包保持集族.

命题 1.3.9 对 $i=1,2,3$, M_i 性质是可数可积性.

证明 仅证明 M_1 空间的情形. 对 $m\in\mathbb{N}$, 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{nm}$ 是 M_1 空间 X_m 的基, 其中 $\mathscr{B}_{nm}$ 是闭包保持的. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{B}_n=(\prod_{m\leqslant n}(\bigcup_{j\leqslant n}\mathscr{B}_{jm}))\times\{\prod_{m>n}X_m\}.$$

则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是正则空间 $\prod_{m\in\mathbb{N}}X_m$ 的 σ 闭包保持基.

本节的最后一部分, 介绍 M_i 空间类的一些基本刻画.

定义 1.3.10　空间 X 的子集 D 称为 X 的正则闭集, 若存在 X 的开集 W, 使 $D=\overline{W}$. 正则闭集的余集称为正则开集.

由定义, D 是 X 的正则闭集当且仅当 $D=D^{\circ-}$; D 是 X 的正则开集当且仅当 $D=D^{-\circ}$. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的闭包保持的正则闭集族, 则 $\mathscr{P}^{\circ}$ 是 X 的闭包保持的开集族.

命题 1.3.11　X 是 M_1 空间当且仅当 X 是具有由正则闭集组成的 σ 闭包保持拟基的正则空间.

证明　若 $\mathscr{B}$ 是 M_1 空间 X 的 σ 闭包保持基, 则 $\mathscr{B}^{-}$ 是 X 的 σ 闭包保持的正则闭拟基. 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 闭包保持的正则闭拟基, 则 $\mathscr{B}^{\circ}$ 是 X 的 σ 闭包保持基.

命题 1.3.12[314]　X 是 M_2 空间当且仅当 X 存在 g 函数满足:

(1) 若 $y\in g(n,x)$, 则 $g(n,y)\subset g(n,x)$;

(2) 若 $y\in X-H\in\tau$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $y\notin\overline{g(m,H)}$.

证明　设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是 M_2 空间 X 的拟基, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 置 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 为

$$g(n,x)=X-\cup\{P\in\overline{\mathscr{B}_i}:x\notin P,i\leqslant n\}.$$

则 g 是 X 的满足 (1) 和 (2) 的 g 函数.

反之, 设 X 具有 g 函数满足条件 (1) 和 (2), 则 X 是正则空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{B}_n=\{X-g(n,A):A\subset X\}.$$

由 g 满足 (1), $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 由 g 满足 (2), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是 X 的拟基. 故 X 是 M_2 空间.

命题 1.3.13[156]　X 是 M_3 空间当且仅当 X 存在 g 函数满足: 若 $y\in X-H\in\tau$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $y\notin\overline{g(m,H)}$.

证明　设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 M_3 空间 X 的对基, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是垫状族. 定义 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 为

$$g(n,x)=X-\overline{\cup\{P_1:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_i,x\notin P_2,i\leqslant n\}}.$$

则 g 是 X 的满足要求的 g 函数.

反之, 设 X 的 g 函数满足: 对 $y\in X-H\in\tau$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $y\notin\overline{g(m,H)}$, 则 X 是正则空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{P}_n=\{(X-\overline{g(n,X-U)},U):U\in\tau\}.$$

若 $\tau'\subset\tau$, 则 $\overline{\cup\{X-g(n,X-U):U\in\tau'\}}\subset X-g(n,X-\cup\tau')\subset\cup\tau'$, 于是 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的垫状族. 对 $x\in U\in\tau$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $x\notin\overline{g(m,X-U)}$, 从而 $x\in X-\overline{g(m,X-U)}\subset U$. 于是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ 垫状基.

注 1.3.14　对空间 X 的 g 函数, 考虑条件:

(1) 若 $y\in X-H\in\tau$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $y\notin g(m,H)$;

(2) 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x \in g(n, x_n)$, 则 $x_n \to x$;

(3) 对 X 的点 $x, \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n, x)$.

那么 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

度量空间的球形邻域族是度量拓扑中最自然的基. 对照本节的一些度量化定理, 有必要讨论度量空间中球形邻域族的局部有限性和紧有限性. 集族 $\mathscr{U}$ 称为星有限的, 若对 $U \in \mathscr{U}$, $(\mathscr{U})_U$ 是有限的.

定理 1.3.15[46] 设 (X, d) 是度量空间, $\varepsilon > 0$. 令 $\mathscr{B}_d(\varepsilon) = \{\mathrm{B}_d(x, \varepsilon) : x \in X\}$. 下述条件等价:

(1) $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 是局部有限的;

(2) $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 是点有限的;

(3) $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 是星有限的.

证明 只须证明 (2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 是点有限的. 对 $B \in \mathscr{B}_d(\varepsilon)$, 让 $B^* = \{x \in B : B = \mathrm{B}_d(x, \varepsilon)\}$, 即球 B 的中心之集. 则 B^*仅与 $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$中有限个元相交. 否则, 存在由 $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$的不同元组成的序列 $\{B_n\}$, 使 $B_n \cap B^* \neq \varnothing$. 取定 $x_n \in B_n \cap B^*, y \in B^*, z_n \in B_n^*$. 则 $d(x_n, z_n) < \varepsilon$, 于是 $z_n \in \mathrm{B}_d(x_n, \varepsilon) = B$, 从而 $d(y, z_n) < \varepsilon$, 因此 $y \in B_n$, 矛盾. 若 $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 不是星有限的, 则存在 $\mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 的元 B 与无限个 B_n^* 相交, 其中 $B_n \in \mathscr{B}_d(\varepsilon)$. 取定 $x_n \in B \cap B_n^*, x \in B^*$. 那么 $d(x, x_n) < \varepsilon$, 于是 $x \in B_n$, 矛盾.

每一度量空间 X 可赋予一相容的度量 d, 使对 $\varepsilon > 0, \mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 是闭包保持的[316]. 对具有不可数个刺的刺猬空间 (hedgehog space) J, 不存在 J 上相容的度量 d, 使对 $\varepsilon > 0, \mathscr{B}_d(\varepsilon)$ 是局部有限的 [46, 411].

1.4 层 对 应

1966 年 Borges[56] 利用 “层对应” 给出了 M_3 空间一个重要刻画. Borges 的方法是产生广义度量空间的重要途径.

定义 1.4.1[56] X 称为层空间, 如果存在函数 $G : \mathbb{N} \times \tau \to \tau$ 满足:

(1) $n \in \mathbb{N}, U \in \tau \Rightarrow \overline{G(n, U)} \subset U = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} G(m, U)$,

(2) $V \subset U \Rightarrow G(n, V) \subset G(n, U)$,

G 称为 X 的层对应. 可假设 G 关于 n 是递增的.

命题 1.4.2[56] 下述条件等价:

(1) X 是 M_3 空间;

(2) X 是层空间;

(3) 存在函数 $H : \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$ 满足:

(i) $n \in \mathbb{N}, F \in \tau^c \Rightarrow H(n,F) \supset F = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{H(m,F)}$,

(ii) $L \subset F \Rightarrow H(n,L) \subset H(n,F)$.

证明　(2) $\Leftrightarrow$ (3) 是显然的.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). 若 g 函数满足 1.3.13 的要求, 则由 $H(n,F) = g(n,F)$ 定义的函数 $H : \mathbb{N}\times\tau^c \to \tau$ 满足 (3). 反之, 若 $H : \mathbb{N}\times\tau^c \to \tau$ 满足 (3), 则由 $g(n,x) = H(n,\{x\})$ 定义的函数 $g : \mathbb{N}\times X \to \tau$ 满足命题 1.3.13.

为了今后叙述的简洁起见, 满足命题 1.3.13 条件的 g 函数称为层函数.

定义 1.4.3　X 称为半层空间 [93], 如果存在函数 $F : \mathbb{N}\times\tau \to \tau^c$ 满足:

(1) $U \in \tau \Rightarrow U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(n,U)$;

(2) $V \subset U \Rightarrow F(n,V) \subset F(n,U)$;

若更设 X 是正则空间且还满足下述条件, 则称 X 是 k 半层空间 [265].

(3) 对 X 的紧集 $K \subset U$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $K \subset F(m,U)$.

上述函数 F 分别称为 X 的半层对应和 k 半层对应. 可假设 F 关于 n 是递增的.

命题 1.4.4[94]　下述条件等价:

(1) X 是半层空间;

(2) X 存在半层函数, 即 X 具有 g 函数满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x \in g(n,x_n)$, 则 $x_n \to x$;

(3) 存在函数 $G : \mathbb{N}\times\tau^c \to \tau$ 满足:

(i) $F \in \tau^c \Rightarrow F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,F)$;

(ii) $L \subset F \Rightarrow G(n,L) \subset G(n,F)$.

证明　(1) $\Leftrightarrow$ (3) 是显然的. 由注 1.3.14, (2) $\Leftrightarrow$ (3).

由定理 1.2.7 和命题 1.4.4, 有下述推论.

推论 1.4.5[94]　X 是半度量空间当且仅当 X 是第一可数的半层空间.

推论 1.4.6[94]　半层性质是可加性, 遗传性和可数可积性.

可数可积性的证明利用 1.4.4(2).

定义 1.4.7　称空间 X 具有 G_δ 对角线 [79] (G_δ^* 对角线 [162]), 若 X 存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足: 对 $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ ($\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$). 上述覆盖列称为 X 的 G_δ 对角线序列 (G_δ^* 对角线序列).

显然, G_δ^* 对角线 $\Rightarrow$ G_δ 对角线.

引理 1.4.8[207]　设 Y 是正则空间 X 的次亚紧子空间. 若 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是由 X 的开集组成的 Y 的覆盖列, 则存在由 X 的开集组成的 Y 的覆盖列 $\{\mathscr{V}_n\}$ 满足: 对 $y \in Y$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(y,\mathscr{U}_n)$.

证明 由 X 的正则性和 Y 的次亚紧性, 对 $m \in \mathbb{N}$, 存在由 X 的开集组成的 Y 的覆盖列 $\{\mathscr{V}_{mn}\}$ 满足:

(1) $\{\mathscr{V}_{mn|Y}\}_n$ 是 $(\bigwedge_{i,j<m} \mathscr{V}_{ij|Y}) \wedge (\bigwedge_{k \leqslant m} \mathscr{U}_{k|Y})$ 的 θ 加细序列;

(2) 对 $V \in \mathscr{V}_{mn}, i, j < m$, 存在 $W \in \mathscr{V}_{ij}$, 使 $\overline{V} \subset W$.

现在, 设 $y \in Y$, $x \in \bigcap_{i,j \in \mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(y, \mathscr{V}_{ij})}$. 固定 $i, j \in \mathbb{N}$, 取 $m > \max\{i, j\}$, 那么有 $n \in \mathbb{N}$, 使 y 仅属于 $\mathscr{V}_{mn}$ 的有限个元, 于是 $\overline{\mathrm{st}(y, \mathscr{V}_{mn})} = \cup\{\overline{V} : y \in V \in \mathscr{V}_{mn}\} \subset \mathrm{st}(y, \mathscr{V}_{ij})$. 从而 $\bigcap_{i,j \in \mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(y, \mathscr{V}_{ij})} = \bigcap_{i,j \in \mathbb{N}} \mathrm{st}(y, \mathscr{V}_{ij}) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{st}(y, \mathscr{U}_n)$.

命题 1.4.9 (1) X 具有 G_δ 对角线当且仅当对角线 $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ 是 X^2 的 G_δ 集 [79].

(2) 具有 G_δ 对角线的正则次亚紧空间具有 G_δ^* 对角线 [162].

证明 由引理 1.4.8 得 (2). 下面证明 (1). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是空间 X 的 G_δ 对角线序列. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$G_n = \cup\{U \times U : U \in \mathscr{U}_n\}.$$

则 $G_n \in \tau(X^2)$ 且 $\Delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$.

设 X^2 的开集列 $\{G_n\}$ 满足: $\Delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{U}_n = \{U \in \tau(X) : U \times U \subset G_n\}.$$

则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列.

定理 1.4.10[80] (Chaber 定理) 具有 G_δ 对角线的可数紧空间是紧可度量空间.

证明 设 X 是具有 G_δ 对角线的可数紧空间. 先证明 X 是紧空间. 让 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列. 若 X 不是紧空间, 则存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 使 $\mathscr{U}$ 不含 X 的可数子覆盖. 取定 $x_0 \in X$, 则存在 $n(0) \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{U}$ 不含 $X - \mathrm{st}(x_0, \mathscr{U}_{n(0)})$ 的可数子覆盖. 否则, 对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族 $\mathscr{B}_n$ 覆盖 $X - \mathrm{st}(x_0, \mathscr{U}_n)$, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{B}_n$ 是 $X - \{x_0\}$ 的可数子覆盖, 从而 $\mathscr{U}$ 就含 X 的可数子覆盖, 矛盾. 对 $\alpha < \omega_1$, 归纳地选取 $x_\alpha \in X$ 及 $n(\alpha) \in \mathbb{N}$, 满足:

(1) $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)})$;

(2) $\mathscr{U}$ 不含 $X - \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)})$ 的可数子覆盖.

上述 x_α 和 $n(\alpha)$ 是可选取的. 因为对 $\alpha < \omega_1$, 若当 $\gamma < \alpha$ 时, $\mathscr{U}$ 不含 $X - \bigcup_{\beta \leqslant \gamma} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)})$ 的可数子覆盖, 那么 $\mathscr{U}$ 就不含 $X - \bigcup_{\beta < \alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)})$ 的可数子覆盖. 否则, $\{\mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)}) : \beta < \alpha\} \cup \mathscr{U}$ 将含 X 的有限子覆盖. 让 γ 是使 $\mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)})$ 出现在这有限覆盖中的最大 β, 那么 $\mathscr{U}$ 就含 $X - \bigcup_{\beta \leqslant \gamma} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)})$ 的有限子覆盖, 矛盾. 于是有 $n(\alpha) \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{U}$ 不含 $X - \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_{n(\beta)})$ 的可数子覆盖.

取定 $m \in \mathbb{N}$ 和 ω_1 的不可数集 A, 使当 $\beta \in A$ 时, $n(\beta) = m$. 由于 $\mathscr{U}_m$ 的每一元至多含 $\{x_\beta : \beta \in A\}$ 中的一个点, 所以 $\{x_\beta : \beta \in A\}$ 是 X 的不可数闭离散集, 矛盾.

其次, 证明 X 是可度量空间. 由命题 1.4.9, X 具有 G_δ^* 对角线. 设 $\{\mathscr{H}_n\}$ 是 X 的 G_δ^* 对角线序列且 $\mathscr{H}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{H}_n$. 对 $x \in U \in \tau, \{U\} \cup \{X - \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{H}_n)} : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的开覆盖, 它存在有限子覆盖, 从而有 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \subset U$. 故 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的展开. 由 Bing 度量化准则, X 是可度量空间.

命题 1.4.11 层空间 $\Rightarrow k$ 半层空间 $\Rightarrow$ 半层空间 $\Rightarrow$ 具有 G_δ 对角线, perfect, 次仿紧空间. 因而正则半层空间具有 G_δ^* 对角线.

证明 显然, 层空间 $\Rightarrow k$ 半层空间 $\Rightarrow$ 半层空间. 设 X 是半层空间, 由定义 1.4.3, X 是 perfect 空间. 再由推论 1.4.6 和命题 1.4.9, X 具有 G_δ 对角线. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{U}_n = \{F(n, U) : U \in \mathscr{U}\},$$

其中 $F : \mathbb{N} \times \tau \to \tau^c$ 是 X 的半层对应. 则 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 垫状加细, 因而 X 是次仿紧空间 (见附录 A 定理 3.3).

推论 1.4.12 可数紧的半层空间是紧可度量空间.

定义 1.4.13[160] X 称为单调正规空间, 如果对 X 中不相交的闭集 F, K, 对应开集 $D(F, K)$ 满足:

(1) $F \subset D(F, K) \subset \overline{D(F, K)} \subset X - K$;

(2) 若 $F \subset F', K' \subset K$, 则 $D(F, K) \subset D(F', K')$.

D 称为 X 的单调正规算子.

定理 1.4.14[160] X 是层空间当且仅当 X 是单调正规的半层空间.

证明 设 X 是层空间, 则存在函数 $H : \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$ 满足命题 1.4.2(3), 不妨设 $H(n+1, F) \subset H(n, F)$. 对 X 中不相交的闭集 F, K, 置

$$D(F, K) = \cup\{H(n, F) - \overline{H(n, K)} : n \in \mathbb{N}\}.$$

则 $F \subset D(F, K) \in \tau$. 若 $y \in K$, 那么存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $y \notin \overline{H(m, F)}$, 于是 $(X - \overline{H(m, F)}) \cap H(m, K)$ 是 y 的开邻域且不交于 $D(F, K)$, 因而 $\overline{D(F, K)} \subset X - K$. 由 D 的定义, D 也满足定义 1.4.13(2).

反之, 设 X 是单调正规的半层空间. 再设 D 和 G 分别是 X 的单调正规算子和满足命题 1.4.4(3) 的函数. 定义 $H : \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$, 使 $H(n, F) = D(F, X - G(n, F))$, 则 H 满足命题 1.4.2(3). 故 X 是层空间.

下面转入讨论 k 半层空间的性质.

命题 1.4.15 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 k 半层空间;

(2) X 存在 k 半层函数 [126, 219], 即 X 具有 g 函数满足: 对 $x \in X$ 及 X 的序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 若 $x_n \in g(n, y_n)$ 且 $x_n \to x$, 则 $y_n \to x$;

(3) 存在函数 $G : \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$ 满足:

(i) $F \in \tau^c \Rightarrow F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G(n, F)$;

(ii) $L \subset F \Rightarrow G(n, L) \subset G(n, F)$;

(iii) 若 X 的紧集 $K \cap F = \varnothing$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $K \cap G(m, F) = \varnothing$[265].

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设 $F : \mathbb{N} \times \tau \to \tau^c$ 是 X 的 k 半层对应, 不妨设 $F(n, U) \subset F(n+1, U)$. 定义 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$, 使 $g(n, x) = X - F(n, X - \{x\})$. 则 g 是 X 的 k 半层函数. 事实上, 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 若 $x_n \in g(n, y_n)$ 且 $x_n \to x \in U \in \tau$, 不妨设所有 $x_n \in U$, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F(m, U)$, 从而当 $n \geqslant m$ 时, $x_n \in F(n, U) - F(n, X - \{y_n\})$, 因此 $y_n \in U$, 故 $y_n \to x$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 g 是 X 的 k 半层函数. 定义 $G : \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$, 使 $G(n, F) = g(n, F)$. 显然, G 满足 (3) 的条件 (i) 和 (ii). 若 X 的紧集 $K \cap F = \varnothing$, 而对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $K \cap G(n, F) \neq \varnothing$, 则有 $y_n \in F$ 和 $x_n \in K \cap g(n, y_n)$. 由推论 1.4.12, $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \to x \in K$, 那么 $y_{n_k} \to x \in F$, 矛盾. 因此, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $K \cap G(m, F) = \varnothing$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 是显然的.

推论 1.4.16[265]　k 半层性质是可加性, 遗传性和可数可积性.

1.5　网, (mod$k$) 网

本节主要描述由网确定的广义度量空间类.

定义 1.5.1　空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的网 [17], 如果对 $x \in U \in \tau$, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P \subset U$. 具有 σ 局部有限网的正则空间称为 σ 空间 [323].

由正则性, σ 空间具有 σ 局部有限闭网.

命题 1.5.2　σ 空间是可加性, 遗传性和可数可积性.

定义 1.5.3[203]　空间 X 的集对族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的对网, 若 $\mathscr{P}$ 满足:

(1) $(P_1, P_2) \in \mathscr{P} \Rightarrow P_1 \subset P_2$;

(2) 对 $x \in U \in \tau$, 存在 $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P_1 \subset P_2 \subset U$.

命题 1.5.4[203]　X 是半层空间当且仅当 X 具有 σ 垫状网.

证明　设 $F : \mathbb{N} \times \tau \to \tau^c$ 是 X 的半层对应. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{P}_n = \{(F(n, U), U) : U \in \tau\},$$

则 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ 垫状网.

设 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的对网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的垫状族. 定义 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$, 使

$$g(n,x)=X-\overline{\cup\{P_1:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_i,x\notin P_2,i\leqslant n\}}.$$

则 g 是 X 的 g 函数. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x\in g(n,x_n)$ 且 $x_n\nrightarrow x$, 不妨设 $x\notin\overline{Z}$, 其中 $Z=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, 于是有 $m\in\mathbb{N}$ 和 $(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_m$, 使 $x\in P_1\subset P_2\subset X-\overline{Z}$. 对 $n\geqslant m$, $g(m,x_n)\cap P_1=\varnothing$, 然而 $x\in g(m,x_n)\cap P_1$, 矛盾. 故 g 是 X 的半层函数. 因此 X 是半层空间.

命题 1.5.5 Moore 空间 $\Rightarrow\sigma$ 空间 $\Rightarrow$ 半层空间.

证明 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 Moore 空间 X 的展开. 因为 X 是次仿紧空间, $\mathscr{U}_n$ 有 σ 局部有限加细 $\mathscr{F}_n$. 那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限网, 故 X 是 σ 空间. 由命题 1.5.4, σ 空间是半层空间.

定义 1.5.6[280] 具有可数网的正则空间称为 cosmic 空间.

命题 1.5.7[280] cosmic 性质是遗传性和可数可积性.

X 称为 $\aleph_1$ 紧空间 [186], 若 X 的闭离散子空间至多是可数集. 显然, Lindelöf 空间和遗传可分空间都是 $\aleph_1$ 紧空间. $\aleph_1$ 紧空间的局部有限集族至多是可数的.

命题 1.5.8 X 是 cosmic 空间当且仅当 X 是 $\aleph_1$ 紧的 σ 空间.

下面介绍网的几种推广形式.

定义 1.5.9 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族.

(1) 对 $A\subset X,\mathscr{P}$ 称为 A 在 X 的网, 如果 $A\subset\cap\mathscr{P}$, 并且若 U 是 X 中含 A 的开集, 那么存在 $P\in\mathscr{P}$, 使 $A\subset P\subset U$.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 (mod$k$) 网 [282], 如果存在 X 的覆盖 $\mathscr{K}\subset\mathscr{K}(X)$, 使对 $K\in\mathscr{K},\{P\in\mathscr{P}:K\subset P\}$ 是 K 在 X 的网. 这时也称 $\mathscr{P}$ 是关于 $\mathscr{K}$ 的 (mod$k$) 网. 具有 σ 局部有限闭 (mod$k$) 网的空间称为强 Σ 空间 [309].

显然, σ 空间是强 Σ 空间.

命题 1.5.10[309] 强 Σ 空间是可加性, 闭遗传性和可数可积性.

证明 仅证明可数可积的情形. 对 $i\in\mathbb{N}$, 设 $\mathscr{P}_i=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_{ij}$ 是强 Σ 空间 X_i 关于 $\mathscr{K}_i$ 的闭 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_{ij}$ 是局部有限的且 $\mathscr{P}_{ij}\subset\mathscr{P}_{ij+1}$. 置 $X=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$. 定义

$$\mathscr{K}=\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{K}_i,\ \mathscr{F}_n=(\prod_{i\leqslant n}\mathscr{P}_{in})\times\{\prod_{i>n}X_i\},n\in\mathbb{N},$$

则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 X 关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 局部有限闭 (mod$k$) 网.

定理 1.5.11[309] 仿紧强 Σ 空间是可数可积性.

证明 仍采用命题 1.5.10 证明中的记号. 更设 X_i 是仿紧空间, 要证明 X 是仿紧空间. 因为仿紧空间是可膨胀空间 (见附录 A 定理 1.11), 对 $i,j\in\mathbb{N}$ 及 $P\in\mathscr{P}_{ij}$, 存在 X_i 中含 P 的开集 $V(P)$, 使 $\{V(P):P\in\mathscr{P}_{ij}\}$ 是局部有限的. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 置

$$\mathscr{F} = \{F \in \mathscr{F}_n : n \in \mathbb{N}, \text{ 存在 } \mathscr{U}' \in \mathscr{U}^{<\omega}, \text{ 使 } F \subset \cup\mathscr{U}'\}.$$

对 $F \in \mathscr{F}$, 选取 $\mathscr{U}_F \in \mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $F \subset \cup\mathscr{U}_F$. 令

$$\mathscr{U}_F = \{U_j(F) : j \leqslant k_F\}, \text{ 其中 } k_F = |\mathscr{U}_F|.$$

那么集族

$$\mathscr{W}(n,j) = \{U_j(F) \cap V(F) : F \in \mathscr{F}_n \cap \mathscr{F}\}$$

是局部有限的, 且 $\bigcup_{n,j\in\mathbb{N}} \mathscr{W}(n,j)$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限开加细. 故 X 是仿紧空间.

定义 1.5.12[287] 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的几乎 (mod$k$) 网, 如果对 $x \in X$, 存在 $K_x \in \mathscr{K}(X)$ 满足: 若 $K_x \subset U \in \tau$, 则存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P \subset U$.

显然, X 的 (mod$k$) 网是几乎 (mod$k$) 网.

引理 1.5.13[287] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数闭集族. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的几乎 (mod$k$) 网, 则存在 X 的覆盖 $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}(X)$ 满足:

(1) $\mathscr{P}$ 是关于 $\mathscr{K}$ 的 (mod$k$) 网;

(2) 若 $x \in P \in \mathscr{P}$, 那么有 $K \in \mathscr{K}$, 使 $x \in K \subset P$.

证明 对 $x \in X$, 置

$$C_x = (\cap(\mathscr{P})_x) \cap K_x,$$

其中 K_x 满足定义 1.5.12 的要求. 令

$$\mathscr{K} = \{C_x : x \in X\}.$$

则 X 的紧覆盖 $\mathscr{K}$ 满足 (2). 设 $C_x \subset U \in \tau$, 让 $(\mathscr{P})_x = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 不妨设 $P_{n+1} \subset P_n$. 置 $L = K_x - U$. 那么 $\{X - P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的紧集 L 的递增的开覆盖, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $L \subset X - P_m$, 从而 $K_x \subset U \cup (X - P_m)$, 所以有 $n \in \mathbb{N}$, 使 $x \in P_n \subset U \cup (X - P_m)$. 取 $j \geqslant \max\{n, m\}$, 那么 $C_x \subset P_j \subset U$. 故 $\mathscr{P}$ 是关于 $\mathscr{K}$ 的 (mod$k$) 网.

命题 1.5.14[287] X 是强 Σ 空间当且仅当 X 具有 σ 局部有限闭几乎 (mod$k$) 网.

定义 1.5.15 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 p 网, 如果对 $x \neq y \in X$, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P \subset X - \{y\}$. 具有 σ 闭包保持闭 p 网的空间称为 $\sigma^\sharp$ 空间 [352].

p 网也称为 X 的分离覆盖 [282], 或 ct 网 [352].

命题 1.5.16[162] X 是 $\sigma^\sharp$ 空间当且仅当 X 存在 $\sigma^\sharp$ 函数, 即 X 具有 g 函数满足:

(1) 对 $x \in X, \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,x)$;

(2) 若 $y \in g(n,x)$, 则 $g(n,y) \subset g(n,x)$.

证明 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 $\sigma^\sharp$ 空间 X 的闭 p 网, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是闭包保持的. 定义 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$, 使

$$g(n,x)=X-\cup\{F\in\mathscr{F}_i:x\notin F,i\leqslant n\}.$$

则 g 是 X 的 $\sigma^\sharp$ 函数.

反之, 设 g 是 X 的 $\sigma^\sharp$ 函数, 则 $\{X-g(n,A):n\in\mathbb{N},A\subset X\}$ 是 X 的 σ 闭包保持闭 p 网.

推论 1.5.17　$\sigma^\sharp$ 空间是可加性, 遗传性和可数可积性.

命题 1.5.18[36]　具有 G_δ 对角线的次亚紧空间是 $\sigma^\sharp$ 空间.

证明　设次亚紧空间 X 具有 G_δ 对角线序列 $\{\mathscr{U}_n\}$. 由 X 的次亚紧性, 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 X 的 σ 闭包保持闭覆盖 $\mathscr{P}_n$ 满足: 对 $x\in X$, 有 $P\in\mathscr{P}_n$ 和 $\mathscr{U}\in(\mathscr{U}_n)_x^{<\omega}$, 使 $x\in P\subset\cup\mathscr{U}$ (见附录 A 定理 4.8), 于是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ 闭包保持闭 p 网. 故 X 是 $\sigma^\sharp$ 空间.

推论 1.5.19[348]　半层空间是 $\sigma^\sharp$ 空间.

1.6　k 网, 弱基

本节讨论一些介于基与网之间的集族性质.

定义 1.6.1[280]　空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的伪基, 如果对 X 的紧集 $K\subset U\in\tau$, 存在 $P\in\mathscr{P}$, 使 $K\subset P\subset U$. 具有可数伪基的正则空间称为 $\aleph_0$ 空间.

命题 1.6.2[280]　可分度量空间 $\Rightarrow$ $\aleph_0$ 空间 $\Rightarrow$ cosmic 空间.

命题 1.6.3[280]　$\aleph_0$ 空间是遗传性和可数可积性.

定理 1.6.4[221, 392]　具有点可数伪基的正则空间是 $\aleph_0$ 空间.

证明　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数伪基.

(4.1) X 具有点 G_δ 性质. 对 $x\in X$, 取定 $y\in X-\{x\}$, 置

$$\mathscr{F}=\{X-\overline{P}:y\in P\subset\overline{P}\subset X-\{x\},P\in\mathscr{P}\}.$$

则 $\mathscr{F}$ 是 X 的可数开集族且 $x\in\cap\mathscr{F}$. 若 $z\in X-\{x\}$, 取 $V\in\tau$, 使 $\{y,z\}\subset V\subset\overline{V}\subset X-\{x\}$, 则存在 $P\in\mathscr{P}$, 使 $\{y,z\}\subset P\subset V$. 于是 $\{y,z\}\subset P\subset\overline{P}\subset X-\{x\}$, 从而 $z\notin\cap\mathscr{F}$. 所以 $\{x\}=\cap\mathscr{F}$.

(4.2) X 是可分空间. 取定 $x\in X$, 让 $\{V_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\tau$, 使 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$. 记 $(\mathscr{P})_x=\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. 对 $n,m\in\mathbb{N}$, 若 $P_m-V_n\neq\varnothing$, 取定 $a_{nm}\in P_m-V_n$; 若 $P_m-V_n=\varnothing$, 令 $a_{nm}=x$. 置 $D=\{a_{nm}:n,m\in\mathbb{N}\}$, 往证 $X=\overline{D}$. 对 $G\in\tau-\{\varnothing\}$, 若 $x\in G$, 则 $G\cap D\neq\varnothing$; 若 $x\notin G$, 取 $y\in G$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $y\in X-V_n$. 由于 $\{x,y\}\subset G\cup V_n$, 有 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\{x,y\}\subset P_m\subset G\cup V_n$, 从而 $y\in P_m-V_n\subset G$, 所以 $a_{nm}\in G$, 故 $G\cap D\neq\varnothing$.

(4.3) X 具有可数伪基. 设 D 是 X 的可数稠集. 置

$$\mathscr{H} = \{P \in \mathscr{P} : P \cap D \neq \varnothing\}.$$

则 $\mathscr{H}$ 可数. 对 X 的紧集 $K \subset G \in \tau - \{\varnothing\}$, 取 $x \in D \cap G$, 则 $K \cup \{x\} \subset G$, 于是有 $P \in \mathscr{H}$, 使 $K \subset P \subset G$. 故 $\mathscr{H}$ 是 X 的可数伪基. 因此 X 是 $\aleph_0$ 空间.

伪基并不是基的自然推广.

定义 1.6.5 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k 网 [325], 如果对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 则存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F} \subset U$. 具有 σ 局部有限 k 网的正则空间称为 $\aleph$ 空间.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs 网 [145], 如果 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in U \in \tau$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathscr{P}$, 使 $\{x\} \cup \{x_n : n \geqslant m\} \subset P \subset U$. 具有 σ 局部有限 cs 网的正则空间称为 cs-σ 空间 [146].

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs^* 网 [127], 如果 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in U \in \tau$, 则存在子列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $P \in \mathscr{P}$, 使 $\{x\} \cup \{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset P \subset U$.

显然, 闭 k 网和 cs 网都是 cs^* 网.

命题 1.6.6[146, 326] $\aleph$ 空间或 cs-σ 空间是可加性, 遗传性和可数可积性.

命题 1.6.7[376] 设 X 的每一紧集是序列紧空间. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 cs^* 网, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网.

证明 对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 记

$$\mathscr{H} = \{P \in \mathscr{P} : P \subset U\};$$
$$(\mathscr{H})_x = \{P_n(x) : n \in \mathbb{N}\},\ x \in K.$$

若不存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F}$, 则可选取序列 $\{x_k\} \subset K$, 使当 $n, j < k$ 时, $x_k \notin P_n(x_j)$. 设 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_{k_i}\}$ 收敛于 $x \in K$. 于是存在 $P \in \mathscr{H}$, 使 P 含无限项 x_{k_i}, 矛盾. 因此存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F}$. 故 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网.

上述命题只用到了弱于 cs^* 网的条件: 若 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in U \in \tau$, 则存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 P 含 $\{x_n\}$ 的无限项且 $P \subset U$.

推论 1.6.8[146] cs-σ 空间是 $\aleph$ 空间.

证明 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 局部有限 cs 网. 对 $K \in \mathscr{K}(X)$, $\mathscr{P}_{|K}$ 是 K 的可数网, 所以 K 是可度量的. 由命题 1.6.7, $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网, 故 X 是 $\aleph$ 空间.

推论 1.6.9[145, 146] 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 $\aleph_0$ 空间;

(2) X 具有可数 cs^* 网;

(3) X 是 $\aleph_1$ 紧的 $\aleph$ 空间;

(4) X 是 $\aleph_1$ 紧的 cs-σ 空间.

证明　显然, (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2). 只须证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的可数 cs^* 网. 由命题 1.6.7 的证明, $\mathscr{P}^F$ 是 X 的可数伪基, 所以 X 是 $\aleph_0$ 空间.

依照定义 1.5.3, 可类似定义对伪基、对 k 网、对 cs 网和对 cs^* 网的概念.

命题 1.6.10[111]　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 k 半层空间;

(2) X 具有 σ 垫状伪基;

(3) X 具有 σ 垫状 cs^* 网.

证明　由命题 1.5.4 的证明得 (1) $\Rightarrow$ (2). (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1).

设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的对 cs^* 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是垫状族. 定义 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$, 使

$$g(n,x)=X-\overline{\cup\{P_1:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_i, x\notin P_2, i\leqslant n\}}.$$

则 g 是 X 的 g 函数. 对 $x\in X$ 及 X 的序列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 若 $x_n\in g(n,y_n)$ 且 $x_n\to x\in U\in\tau$, 那么存在子列 $\{x_{n_i}\}, k\in\mathbb{N}$ 和 $(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_k$, 使 $\{x\}\cup\{x_{n_i}: i\in\mathbb{N}\}\subset P_1\subset P_2\subset U$. 由于 $x_{n_i}\in g(n_i,y_{n_i})$, 有 $y_{n_i}\in P_2\subset U$. 这一结论对 $\{x_n\},\{y_n\}$ 的子列仍成立, 从而 $y_n\to x$. 因此 g 是 X 的 k 半层函数, 所以 X 是 k 半层空间.

推论 1.6.11[265]　$\aleph$ 空间是 k 半层空间.

本节后一部分, 讨论介于基与 cs 网之间的一种集族性质.

定义 1.6.12　空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基[24], 如果 $\mathscr{P}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$ 满足:

(1) $x\in\cap\mathscr{P}_x$;

(2) 若 $U,V\in\mathscr{P}_x$, 则存在 $W\in\mathscr{P}_x$, 使 $W\subset U\cap V$;

(3) X 的子集 $G\in\tau$ 当且仅当对 $x\in G$, 存在 $P\in\mathscr{P}_x$, 使 $P\subset G$.

$\mathscr{P}_x$ 称为 x (在 X 中) 的弱基, X 的含 $\mathscr{P}_x$ 的元的子集称为 x 的弱邻域. 若 $\mathscr{P}_x$ 是可数的, X 称为 g 第一可数空间 (或 gf 可数空间). 若 $\mathscr{P}$ 是可数的, X 称为 g 第二可数空间. 具有 σ 局部有限弱基的正则空间称为 g 可度量空间[351].

若 $\mathscr{P}$ 是 X 的弱基, 且 A 是 X 的开子空间或闭子空间, 则 $\mathscr{P}_{|A}$ 是 A 的弱基. 因而 g 第一可数性或 g 可度量性都是开遗传性和闭遗传性.

弱邻域的概念是对称度量空间中球形邻域的一般化, 所以用弱基的概念来刻画对称度量空间是毫不奇怪的.

定义 1.6.13[391]　X 的覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的弱展开, 若对 $x\in X$, $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 的弱基.

命题 1.6.14[391]　X 是对称度量空间当且仅当 X 具有弱展开.

证明　设 (X,d) 是对称度量空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{U}_n = \{A \subset X : \mathrm{diam} A < 1/n\}.$$

则对 $x \in X$ 有 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \mathrm{B}(x, 1/n)$. 从而 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的弱展开.

反之, 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的弱展开. 对 $x \neq y \in X$, $n(x,y)$ 表示使 $x \notin \mathrm{st}(y, \mathscr{U}_n)$ 的最小整数 n. 定义 $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, 使

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 2^{-n(x,y)}, & x \neq y. \end{cases}$$

则 d 是 X 的对称距离且对 $x \in X, n \in \mathbb{N}$ 有 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \mathrm{B}(x, 1/2^n)$. 因而 X 是对称度量空间.

定义 1.6.15[115] X 称为序列空间, 如果对 $U \subset X, U$ 是 X 的闭集当且仅当对 $Z \in \mathscr{S}(X), Z \cap U$ 是 X 的闭集.

显然, 序列空间是可加性, 开遗传性和闭遗传性.

命题 1.6.16[351] g 第一可数空间是序列空间.

证明 设 X 是 g 第一可数空间. 若 X 的子集 F 与 X 的含极限点的收敛序列之交是 X 的闭集, 对 $x \notin F$, 让 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 x 的递减的弱基, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $P_m \cap F = \varnothing$. 否则, 存在 F 的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \in P_n$, 于是 $x_n \to x$, 那么 $F \cap (\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ 不是 X 的闭集, 矛盾. 故 F 是 X 的闭集. 因而, X 是序列空间.

命题 1.6.17 设 X 是 Fréchet 空间. 若 W 是 x 在 X 的弱邻域, 则 $x \in W^\circ$.

证明 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{P}_x$ 是如定义 1.6.12 中空间 X 的弱基, 其中 $W \supset P \in \mathscr{P}_x$. 若 $x \in X - W^\circ \subset X - P^\circ = \overline{X - P}$, 则存在 $X - P$ 的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \to x$. 置 $Z = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则 Z 不是 X 的闭集. 另一方面, 对 $y \in X - Z$, 若 $y = x$, 则 $P \subset X - Z$; 若 $y \neq x$, 则 $y \in X - \overline{Z}$, 于是有 $G \in \mathscr{P}_y$, 使 $G \subset X - \overline{Z} \subset X - Z$. 从而 Z 是 X 的闭集, 矛盾. 故 $x \in W^\circ$.

推论 1.6.18[351] X 是第一可数空间当且仅当 X 是 g 第一可数的 Fréchet 空间.

对空间 X 及 $F \subset W \subset X$, W 称为 F 的序列邻域, 如果 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 F 的点, 则 $\{x_n\}$ 终于 W, 即存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\{x_n : n \geqslant m\} \subset W$. 对 $Z \subset X$, Z 称为 X 的序列开集, 若对 $z \in Z$, Z 是 z 的序列邻域; Z 称为 X 的序列闭集, 若 $X - Z$ 是序列开集. 显然, X 是序列空间当且仅当 X 的序列开集是开集, 当且仅当 X 的序列闭集是闭集 [115].

定义 1.6.12 中点的弱基 $\mathscr{P}_x$ 可理解为 x 的弱邻域族组成的网. 由序列邻域的概念, 可类似定义 x 的序列邻域网.

推论 1.6.19 若 B_x 是点 x 在空间 X 的弱邻域, 那么 B_x 是 x 的序列邻域.

证明 设 X 中序列 $x_n \to x$. 令 $Z = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 则 Z 是 X 的 Fréchet 闭子空间, 于是 $x \in \mathrm{int}_Z(B_x \cap Z)$, 从而 $\{x_n\}$ 终于 B_x.

推论 1.6.20[351] 若 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的弱基, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 网.

命题 1.6.21[247] 若 $\mathscr{P}$ 是 g 第一可数空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs 网, 那么 $\mathscr{P}$ 的某子族构成了 X 的弱基.

证明 对 $x \in X$, x 的递减的弱基记为 $\{B(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 置

$$\mathscr{P}_x = \{P \in \mathscr{P} : \text{存在 } n \in \mathbb{N}, \text{ 使 } B(n,x) \subset P\}.$$

往证 $\mathscr{P}_x$ 是 x 的弱基. 显然 $x \in \cap\mathscr{P}_x$ 且 $\mathscr{P}_x$ 关于有限交封闭. 若 X 的子集 G 满足: 对 $x \in G$, 存在 $P \in \mathscr{P}_x$, 使 $P \subset G$, 那么存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $B(n,x) \subset G$, 从而 $G \in \tau$. 若 $x \in G \in \tau$, 则存在 $P \in \mathscr{P}_x$, 使 $P \subset G$. 否则, 记 $\{P \in \mathscr{P} : x \in P \subset G\} = \{P(m,x)\}_{m\in\mathbb{N}}$, 那么 $B(n,x) \not\subset P(m,x)$, 取定 $x_{nm} \in B(n,x) - P(m,x)$. 对 $n \geqslant m$, 令 $x_{nm} = y_k$, 其中 $k = m + \frac{n(n-1)}{2}$, 则 $y_k \to x$. 从而存在 $m, i \in \mathbb{N}$, 使

$$\{x\} \cup \{y_k : k \geqslant i\} \subset P(m,x) \subset G.$$

取 $j \geqslant i$, 使对某个 $n \geqslant m$ 有 $y_j = x_{nm}$, 那么 $x_{nm} \in P(m,x)$, 矛盾. 故 $\bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$ 是 X 的弱基.

由命题 1.6.21 和推论 1.6.20, 有下述定理.

定理 1.6.22[351] X 是 g 可度量空间当且仅当 X 是 g 第一可数的 cs-σ 空间.

因而, 正则空间 X 是 g 第二可数空间当且仅当它是 g 第一可数的 $\aleph_0$ 空间[351].

例 1.6.23[256] 紧空间的弱基不是 k 网.

取 $X = [0, \omega_1]$. 赋予 X 序拓扑, 则 X 是紧空间. 设 $\mathbf{L}$ 是 X 中全体聚点的集合. 对 $\alpha < \omega_1$, 让 $\mathscr{P}_\alpha$ 是 α 的局部基. 定义 $\mathscr{P}_{\omega_1} = \{(\beta, \omega_1] \cap \mathbf{L} : \beta < \omega_1\}$. 令 $\mathscr{P} = \bigcup_{\alpha \leqslant \omega_1} \mathscr{P}_\alpha$. 由于 X 是紧空间且 $\mathscr{P}$ 中任意有限个元不能覆盖 X, 所以 $\mathscr{P}$ 不是 X 的 k 网. 下面证明 $\mathscr{P}$ 是 X 的弱基. 设 X 的子集 U 满足: 对 $\alpha \in U$, 存在 $P \in \mathscr{P}_\alpha$, 使 $P \subset U$. 若 $\alpha \in U - \{\omega_1\}$, U 是 α 的邻域. 若 $\omega_1 \in U$, 存在 $\beta < \omega_1$, 使 $(\beta, \omega_1] \cap \mathbf{L} \subset U$. 于是存在 $\alpha \in (\beta, \omega_1)$, 使 $(\alpha, \omega_1] \subset U$. 否则, $(\beta, \omega_1) - U$ 中含严格递增的序列 $\{\alpha_n\}$. 设 $\gamma = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. 则 $\gamma \in U$, 所以存在 $\alpha_n \in U$, 矛盾. 从而 U 是 X 的开集. 因而, $\mathscr{P}$ 是 X 的弱基.

1.7 广义可数紧空间

前几节定义或刻画的广义度量空间类中有许多空间具有下述特点之一, 一是利用 g 函数, 通过满足某种条件的序列收敛进行描述, 如半度量空间, 可展空间, k

半层空间等; 二是利用空间的开覆盖列, 通过满足某种条件的序列收敛进行描述, 如度量空间, 可展空间等. 若将上述依某种条件确定的序列收敛换为该序列存在聚点, 则又产生一批广义度量空间. 这类空间统称为广义可数紧空间 [168].

定义 1.7.1 对空间 X 及其 g 函数, 考虑附加条件:

(1) 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \in g(n,x)$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点;

(2) 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x \in g(n,x_n)$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点;

(3) 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 若 $\{x,x_n\} \subset g(n,y_n)$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点.

如果 X 存在 g 函数分别满足条件 (1), (2), (3), 则 X 依次称为 q 空间 [279], β 空间[162]和 wΔ 空间 [57], 其 g 函数相应地称为 q 函数, β 函数和 wΔ 函数.

由定义, 第一可数空间是 q 空间, 半层空间是 β 空间, 可展空间是 wΔ 空间.

命题 1.7.2[385] 下述条件等价:

(1) X 是 β 空间;

(2) 存在函数 $F:\mathbb{N}\times\tau\to\tau^c$ 满足:

(i) $U\in\tau \Rightarrow F(n,U)\subset U$;

(ii) $V\subset U \Rightarrow F(n,V)\subset F(n,U)$;

(iii) 若 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的递增的开覆盖, 则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(n,U_n)=X$;

(3) 存在函数 $G:\mathbb{N}\times\tau^c\to\tau$ 满足:

(i) $F\in\tau^c \Rightarrow F\subset G(n,F)$;

(ii) $L\subset F \Rightarrow G(n,L)\subset G(n,F)$;

(iii) 若 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的递减且交为空的闭集列, 则 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,F_n)=\varnothing$.

证明 只须证 (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 g 是 X 的 β 函数. 定义 $G:\mathbb{N}\times\tau^c\to\tau$, 使 $G(n,F)=g(n,F)$, 则 G 满足 (3). 事实上, 若 $\{F_n\}$ 是 X 的递减的闭集列且存在 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,F_n)$, 则有 $x_n\in F_n$, 使 $x\in g(n,x_n)$, 从而 $\{x_n\}$ 有聚点, 故 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\varnothing$.

(3) $\Rightarrow$ (1). 不妨设 G 关于 n 是递减的. 定义 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 为 $g(n,x)=G(n,\{x\})$, 则 g 是 X 的 β 函数. 事实上, 对 $x\in X$ 及 X 的序列 $\{x_n\}$, 若 $x\in g(n,x_n)$, 而 $\{x_n\}$ 无聚点, 令

$$F_n=\{x_i: i\geqslant n\}, n\in\mathbb{N}.$$

则 $\{F_n\}$ 是 X 的递减且交为空的闭集列, 于是 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,F_n)=\varnothing$. 然而 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,F_n)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,F_n)$, 矛盾.

由此, β 空间是可数亚紧空间 (见附录 A 命题 2.8).

命题 1.7.3[162] X 是 wΔ 空间当且仅当 X 存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点.

证明类似于定理 1.2.10. 上述开覆盖列称为 X 的 wΔ 序列. 一般地, 若 X 的覆盖列 $\{\mathscr{F}_n\}$ 满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 如果 $x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点, 那么称 $\{\mathscr{F}_n\}$ 满足 wΔ 条件.

定义 1.7.4 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是空间 X 的开覆盖列. 考虑附加条件:

(1) 对 $n \in \mathbb{N}, \mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$ 且 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wΔ 序列;

(2) 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \in \mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n)$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点.

满足上述附加条件的空间分别称为 M 空间 [301]和 wM 空间 [175], 相应的覆盖列依次称为 M 序列和 wM 序列.

可数紧空间或度量空间是 M 空间, M 空间是 wM 空间, wM 空间是 wΔ 空间, wΔ 空间是 β 空间和 q 空间.

引理 1.7.5[348] wM 空间是可膨胀空间.

证明 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wM 序列, 不妨设 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$.

(5.1) 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \in \mathrm{st}^3(x, \mathscr{U}_n)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

若 $\{x_n\}$ 无聚点, 设各 x_n 互不相同, 那么 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的闭离散集, 从而 $\{\mathrm{st}(x_n, \mathscr{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的局部有限集族. 否则, 存在 $z \in X$, 对 $n \in \mathbb{N}$, 有 $i(n) \geqslant n$, 使 $\mathrm{st}(z, \mathscr{U}_n) \cap \mathrm{st}(x_{i(n)}, \mathscr{U}_{i(n)}) \neq \varnothing$, 从而 $x_{i(n)} \in \mathrm{st}(\mathrm{st}(z, \mathscr{U}_n), \mathscr{U}_{i(n)}) \subset \mathrm{st}^2(z, \mathscr{U}_n)$, 于是 $\{x_{i(n)}\}$ 有聚点, 矛盾. 由于 $x_n \in \mathrm{st}^3(x, \mathscr{U}_n)$, 所以 $\mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n) \cap \mathrm{st}(x_n, \mathscr{U}_n) \neq \varnothing$, 取 $y_n \in \mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n) \cap \mathrm{st}(x_n, \mathscr{U}_n)$, 则 $\{y_n\}$ 无聚点, 矛盾.

(5.2) X 是可数仿紧空间.

设 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X 的递增的开覆盖. 令

$$F_n = X - \mathrm{st}^2(X - G_n, \mathscr{U}_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

则 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. 事实上, 若 $z \in X - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{st}^2(X - G_n, \mathscr{U}_n)$. 那么 $\mathrm{st}^2(z, \mathscr{U}_n) \cap (X - G_n) \neq \varnothing$, 从而 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X - G_n) \neq \varnothing$, 矛盾. 再令

$$H_n = X - \overline{\mathrm{st}(X - G_n, \mathscr{U}_n)},\ n \in \mathbb{N}.$$

那么 $F_n \subset H_n \subset \overline{H}_n \subset G_n$, 于是 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, 故 X 是可数仿紧空间 (见附录 A 命题 1.13).

(5.3) X 是可膨胀空间.

设 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 的局部有限的闭集族. 对 $x \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\{\lambda \in \Lambda : \mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n) \cap F_\lambda \neq \varnothing\}$ 是有限的. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$A_n = \{x \in X : \{\lambda \in \Lambda : \mathrm{st}^2(x, \mathscr{U}_n) \cap F_\lambda \neq \varnothing\} \text{ 是有限的 }\},$$
$$B_n = A_n^\circ\ .$$

则 $B_n \subset B_{n+1}$. 断言: $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. 事实上, 对 $z \in X$, 由 (5.1), 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\{\lambda \in \Lambda : \mathrm{st}^3(z, \mathscr{U}_n) \cap F_\lambda \neq \varnothing\}$ 是有限的, 从而 $\mathrm{st}(z, \mathscr{U}_n) \subset A_n$, 故 $z \in B_n$. 由 (5.2), 存在 X 的局部有限开覆盖 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 使 $\overline{G}_n \subset B_n$. 令

$$G_{\lambda n}=\mathrm{st}(F_\lambda,\mathscr{U}_n)\cap G_n,\ H_\lambda=\cup\{G_{\lambda n}:n\in\mathbb{N}\}.$$

则 $F_\lambda\subset H_\lambda\in\tau$. 往证 $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是局部有限的. 对 $x\in X$, 记

$$U=X-\cup\{\overline{G}_n:x\notin\overline{G}_n,n\in\mathbb{N}\},$$
$$\{G_n:n\in\mathbb{N},x\in\overline{G}_n\}=\{G_{n(i)}:i\leqslant k\},$$
$$m=\max\{n(i):i\leqslant k\},$$
$$V=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)\cap U,$$

则 $x\in V\in\tau$. 对 $i\leqslant k$, 由于 $x\in B_{n(i)}$,

$$\{\lambda\in\Lambda:\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)\cap G_{\lambda n(i)}\neq\varnothing\}\subset\{\lambda\in\Lambda:\mathrm{st}^2(x,\mathscr{U}_{n(i)})\cap F_\lambda\neq\varnothing\}$$

是有限集, 从而 V 仅与 $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 中有限个元相交. 故 X 是可膨胀空间.

引理 1.7.6 (收敛引理) 设空间 X 具有递减的集列 $\{G_n\}$, 使 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{G}_n$. 下述条件等价:

(1) 对 X 的序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\in G_n$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点;

(2) $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数紧集 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$ 在 X 中的网.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 显然, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$ 是 X 的可数紧闭集. 对 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n\subset V\in\tau$, 若存在 X 的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n\in G_n-V$,设 x 是 $\{x_n\}$ 的聚点, 那么 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{G}_n-V=\varnothing$, 矛盾. 从而存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $G_m\subset V$. 即, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$ 在 X 中的网.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 $x_n\in G_n$. 若 $\{x_n\}$ 无聚点, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n\subset X-\{x_n:n\geqslant m\}$, 从而有 $k\geqslant m$, 使 $x_k\in G_k\subset X-\{x_n:n\geqslant m\}$, 矛盾.

定理 1.7.7 (1) 若正则空间 X 是具有点 G_δ 性质的 q 空间, 则 X 是第一可数空间[285];

(2) 设 X 具有 G_δ^* 对角线或是 $\sigma^\sharp$ 空间. 当 X 是 β 空间时, X 是半层空间 [162]; 当 X 是 wΔ 空间时, X 是可展空间 [162]; 当 X 是 wM 空间时, X 是度量空间 [348].

证明 (1) X 存在 q 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 满足: $\overline{g(n+1,x)}\subset g(n,x)$ 且 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}g(n,x)$. 由引理 1.7.6, $\{g(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的邻域基. 故 X 是第一可数空间.

(2) 设 X 具有 G_δ^* 对角线. 让 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 G_δ^* 对角线序列, 其中 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$.

当 X 是 β 空间时, 让 g 是 X 的 β 函数, 定义 $h:\mathbb{N}\times X\to\tau$, 使 $h(n,x)=g(n,x)\cap\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 则 h 是 X 的半层函数. 事实上, 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x\in h(n,x_n)$, 那么 $\{x_n\}$ 的任一子列有聚点. 设 y 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点且 $y\neq x$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $y\notin\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$, 于是存在 $m\geqslant n$, 使 $x_m\notin\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)$, 从而 $x\notin\mathrm{st}(x_m,\mathscr{U}_m)$, 矛盾. 所以, x 是 $\{x_n\}$ 的任一子列的聚点, 故 $x_n\to x$. 因而 X 是半层空间. 当 X 是 wΔ 空间时, 让 $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 X 的 wΔ 序列, 则 $\{\mathscr{U}_n\wedge\mathscr{V}_n\}$ 是 X 的

展开. 当 X 是 wM 空间时, X 是可展的可膨胀空间, 于是 X 是可展的仿紧空间 (见附录 A 定理 4.10), 故 X 是度量空间.

再设 X 是 $\sigma^\sharp$ 空间. 当 X 是 β 空间时, 分别以 g, h 表示 X 的 $\sigma^\sharp$ 函数和 β 函数, 定义 $l : \mathbb{N} \times X \to \tau$, 使 $l(n,x) = g(n,x) \cap h(n,x)$. 往证 l 是 X 的半层函数. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x \in l(n, x_n)$, 由于 h 是 β 函数, $\{x_n\}$ 有聚点. 设 y 是 $\{x_n\}$ 的聚点, 不妨设 $x_n \in g(n,y)$, 从而 $x \in g(n,x_n) \subset g(n,y)$, 因此 $x = y$. 这说明 $\{x_n\}$ 的任一子列都有聚点且以 x 为唯一聚点, 故 $x_n \to x$. 所以 X 是半层空间. 当 X 是 wΔ 空间时, 由类似的证明, X 是可展空间. 当 X 是 wM 空间时, X 是可展的 wM 空间, 于是 X 是度量空间.

问题 1.7.8[66]　具有点可数基的 wΔ 空间是否是可展空间?

问题 1.7.9[107]　拟可展的 β 空间是否是可展空间?

问题 1.7.10[175]　具有 G_δ 对角线的 wM 空间是否是可度量空间?

定义 1.7.11[106]　空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为内部保持的, 如果对 $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ 有 $(\cap\mathscr{F})^\circ = \cap\mathscr{F}^\circ$.

显然, X 的集族 $\mathscr{P}$ 是内部保持的当且仅当 $\{X - P\}_{P\in\mathscr{P}}$ 是闭包保持的. 应当注意的是, 对 X 的 g 函数, 若 $x \in g(n,y)$ 有 $g(n,x) \subset g(n,y)$, 则 $\{g(n,A) : A \subset X\}$ 是内部保持的; 若 X 的开集族 $\mathscr{B}_n$ 是内部保持的, 令 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$, 使 $g(n,x) = \cap(\mathscr{B}_n)_x$, 则 g 满足: 如果 $x \in g(n,y)$, 那么 $g(n,x) \subset g(n,y)$.

命题 1.7.12　具有 σ 内部保持基的空间是 $\sigma^\sharp$ 空间.

证明　设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$ 是空间 X 的基, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是内部保持的, 并且 $X \in \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}_{n+1}$. 定义 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$, 使 $g(n,x) = \cap(\mathscr{B}_n)_x$. 则 g 是 X 的 $\sigma^\sharp$ 函数, 故 X 是 $\sigma^\sharp$ 空间.

1.8　例

本节例举一些例子, 目的是说明一些空间类的不蕴涵关系. 例子的引用文献仅指构造例子的文献.

例 1.8.1[150]　V 空间.

取 $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$. 赋 X 予 V 拓扑: 对 $y > 0, (x,y)$ 是 X 的孤立点; 对 $y = 0, (x,y)$ 的邻域基元形如

$$V(x,n) = \{(t,s) \in X : t = x \pm s, 0 \leqslant s \leqslant 1/n\}, n \in \mathbb{N}\,.$$

X 称为 V 空间, 或 Heath 的 V 空间.

易见, X 是完全正则的亚紧空间. 由于 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 关于欧氏拓扑是第二范畴的, 用标准的范畴方法 (category method), X 不是正规空间. 置

$$\mathscr{U}_n = \{V(x,n) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y) \in X : y > 1/n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的展开, 故 X 是 Moore 空间.

例 1.8.2[155] 领结空间.

取 $X = \mathbb{R}^2$. 对 $x = (t,s) \in X, n \in \mathbb{N}$, 记 $Bt(x, 1/n)$ 为领结形集合

$$\{x\} \cup \{(t', s') \in X : 0 < |t - t'| < 1/n, |s - s'|/|t - t'| < 1/n\}.$$

以 $\{Bt(x,1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 作为 x 的邻域基, 生成 X 的拓扑称为领结拓扑, 而空间 X 称为领结空间. 这时 X 是正则空间.

(2.1) X 是半度量空间. 定义 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$, 使 $g(n,x) = Bt(x,1/n)$. 则 g 是 X 的半度量函数, 所以 X 是半度量空间. 可以具体地给出 X 的半度量 d:

$$d((t,s),(t',s')) = \begin{cases} 0, & t = t' \text{ 且 } s = s', \\ 1, & t = t' \text{ 且 } s \neq s', \\ |t - t'| + |(s - s')/(t - t')|, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2.2) X 不是 σ 空间 [140]. 若不然, X 具有闭网 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是离散的 (见定理 3.3.1). 对 $x \in X$, 存在 $n(x) \in \mathbb{N}, F_x \in \mathscr{F}_{n(x)}$, 使 $x \in F_x \subset Bt(x,1)$. 由于 $\mathbb{R}^2$ 关于欧氏拓扑是第二范畴的, 存在 $m \in \mathbb{N}, Y \subset X$, 使当 $x \in Y$ 时, $n(x) = m$, 且 Y 在 $\mathbb{R}^2$ 的某个欧氏开集 U 中稠. 取定 $p \in U$, 置 $W = X - \cup\{F \in \mathscr{F}_m : p \notin F\}$. 则 $p \in W \in \tau(X)$. 取点 $y, z \in Y \cap W \cap U$, 使 $y \notin Bt(z,1), z \notin Bt(y,1)$, 那么 $F_y \neq F_z \in \mathscr{F}_m$, 于是 $F_y \cap F_z = \varnothing$, 从而有 $F \in \mathscr{F}_m$, 满足 $p \notin F$ 且 $F \cap W \neq \varnothing$, 这与 W 的定义矛盾. 故 X 不是 σ 空间.

由定理 1.7.7, X 不是 wΔ 空间.

例 1.8.3[272] 蝶形空间.

取 $X = \mathbb{R}^2$. 赋予 X 蝶形拓扑: 对 $x = (t,s) \in X$, 若 $s \neq 0$, x 具有欧氏邻域; 若 $s = 0$, x 的邻域基元为领结形集合 $Bt(x,1/n), n \in \mathbb{N}$. 具有蝶形拓扑的空间称为蝶形空间. 这时 X 是正则空间.

(3.1) X 是 cosmic 空间. 由于 X 的子空间 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 和 $X - (\mathbb{R} \times \{0\})$ 都具有欧氏拓扑, 设 $\mathscr{P}, \mathscr{F}$ 分别是它们的可数基, 那么 $\mathscr{P} \cup \mathscr{F}$ 是 X 的可数网, 于是 X 是 cosmic 空间.

(3.2) X 是半度量空间. 显然, X 是第一可数空间. 由推论 1.4.5, X 是半度量空间.

(3.3) X 的紧集 $\mathbb{I} \times \{0\}$ 在 X 中不具有可数邻域基. 若不然, 设 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{I} \times \{0\}$ 在 X 的可数邻域基. 对 $x \in \mathbb{I} \times \{0\}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $U_n \subset Bt(x,2)$, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{I} \times \{0\}$ 的无限集 Z, 使 $U_m \subset \bigcap_{x \in Z} Bt(x,2)$. 设 a 是 Z 在 $\mathbb{I} \times \{0\}$ 的

聚点, 那么存在 $k \in \mathbb{N}$, 使 $Bt(a, 1/k) \subset U_m$. 取 $b \in Z - \{a\}$ 且 b 与 a 的第一个分量之距离小于 $1/k$, 那么 $Bt(a, 1/k) \subset Bt(b, 2)$, 矛盾.

(3.4) X 不是 wΔ 空间. 否则, X 是仿紧的可展空间, 于是 X 是可度量空间, 这与 (3.3) 矛盾.

(3.5) Ceder[79] 曾证明: X 是 M_1 空间.

例 1.8.4[307, 134] Isbell-Mrówka 空间 $\psi(D)$.

设 D 是一无限集. D 的可数, 无限集的族 $\mathscr{A}$ 称为几乎互不相交的, 若 $\mathscr{A}$ 中任两不同元之交为有限集. 设 $\mathscr{A}$ 是 D 的极大几乎互不相交族, 则 $\mathscr{A}$ 是不可数的. 否则, 记 $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对 $i \in \mathbb{N}$, $A_i - \bigcup_{n<i} A_n = A_i - \bigcup_{n<i}(A_n \cap A_i)$ 是无限集, 所以存在 $x_i \in A_i - \bigcup_{n<i} A_n$. 令 $E = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. 则对 $i \in \mathbb{N}$, $E \cap A_i$是有限集, 那么 $E \notin \mathscr{A}$ 且 $\mathscr{A} \cup \{E\}$ 是几乎互不相交族, 矛盾.

置 $\psi(D) = \mathscr{A} \cup D$. $\psi(D)$ 赋予下述拓扑称为 Isbell-Mrówka 空间: D 的点取为 $\psi(D)$ 的孤立点; 对 $A \in \mathscr{A}, A$ 在 $\psi(D)$ 的邻域基元形如 $\{A\} \cup (A - F)$, $F \in A^{<\omega}$. 则 $\psi(D)$ 是局部紧空间.

(4.1) $\psi(D)$ 具有 σ 内部保持基. 记 $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对 $\alpha \in \Lambda$, 令 $A_\alpha = \{x(\alpha, n) : n \in \mathbb{N}\}$. 定义

$$\mathscr{B}_1 = \{\{x\} : x \in D\};$$

$$\mathscr{B}_{n+1} = \{\{A_\alpha\} \cup \{x(\alpha, m) : m \geqslant n\} : \alpha \in \Lambda\},\ n \in \mathbb{N}.$$

则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$ 是 $\psi(D)$ 的 σ 内部保持基.

(4.2) $\psi(D)$ 是拟可展空间. 对 $x \in \psi(D), \{\mathrm{st}(x, \mathscr{B}_n) : n \in \mathbb{N}, \mathrm{st}(x, \mathscr{B}_n) \neq \phi\}$ 是 x 在 $\psi(D)$ 的邻域基. 故 $\psi(D)$ 是拟可展空间.

(4.3) $\psi(D)$ 是伪紧空间. 设 $f : \psi(D) \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 由于 D 的任一无限集有聚点位于 $\mathscr{A}$ 中, 于是 $f_{|D}$ 是有界函数. 又由于 D 是 $\psi(D)$ 的稠集, 所以 f 是有界函数. 故 $\psi(D)$ 是伪紧空间.

(4.4) $\psi(D)$ 不是亚 Lindelöf 空间. 因为 $\psi(D)$ 的开覆盖 $\{\{A_\alpha\} \cup D\}_{\alpha\in\Lambda}$ 没有点可数的开加细, 所以 $\psi(D)$ 不是亚 Lindelöf 空间. 由此, $\psi(D)$ 不具有点可数基, 不是 cosmic 空间, 不是 wM 空间 (见定理 1.7.7).

对 Isbell-Mrówka 空间, 随着 D 不同的基数, 反映出特别的性质.

(4.5) $\psi(\mathbb{N})$ 是可展空间. 不妨设 $\cup\mathscr{A} = \mathbb{N}$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$F_n = \{1, 2, \cdots, n\},$$

$$\mathscr{U}_n = \{\{A_\alpha\} \cup (A_\alpha - F_n) : \alpha \in \Lambda\} \cup \{\{x\} : x \in F_n\}.$$

若 $x \in \psi(\mathbb{N})$, 则

$$\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \begin{cases} \{A_\alpha\} \cup (A_\alpha - F_n), & x = A_\alpha, \\ \{x\}, & x \in F_n. \end{cases}$$

于是 $\psi(\mathbb{N})$ 是可展空间.

(4.6) 若 $|D| > \mathbf{c}$, 则 $\psi(D)$ 不具有 σ 局部有限闭 p 网 [81]. 若不然, 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 $\psi(D)$ 的闭 p 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的. 由 $\mathscr{A}$ 的极大性, $\mathscr{P}_{n|D}$ 是有限集, 于是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_{n|D}$ 是 D 的可数 p 网, 从而 $|D| \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = \mathbf{c}$, 矛盾. 这时 $\psi(D)$ 不是 β 空间. 否则, 由定理 1.7.7, $\psi(D)$ 是半层空间, 所以 $\psi(D)$ 是具有 G_δ 对角线的次仿紧空间, 因此 $\psi(D)$ 具有 σ 局部有限闭 p 网, 矛盾.

例 1.8.5[278] Michael 直线.

让 $X = \mathbb{I}$. 取 B 是 X 的 Bernstein 集 [101, 202]. 即, B 具有性质:

(1) B 及 $\mathbb{I} - B$ 都具有基数 $\mathbf{c}$ 且在 $\mathbb{I}$ 中关于欧氏拓扑是稠集;

(2) B 及 $\mathbb{I} - B$ 在 $\mathbb{I}$ 中关于欧氏拓扑的闭子集都是可数集.

X 赋予如下拓扑称为 Michael 直线 (或关于 B 的 Michael 直线): G 是 X 的开集当且仅当存在 $\mathbb{I}$ 的欧氏开集 U 和 B 的子集 Z, 使 $G = U \cup Z$. 这时 X 是正则空间.

(5.1) X 是 Lindelöf 空间. 设 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的开覆盖. 对 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $\mathbb{I}$ 的欧氏开集 U_α 和 B 的子集 Z_α, 使 $V_\alpha = U_\alpha \cup Z_\alpha$. 令

$$U = \cup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}.$$

则存在 Λ 的可数集 Λ_1, 使 $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_1} U_\alpha$. 由 Bernstein 集的性质, $X - U$ 是可数集, 从而存在 Λ 的可数集 Λ_2, 使 $X - U \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda_2} V_\alpha$, 故 $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_1\cup\Lambda_2} V_\alpha$. 因此 X 是 Lindelöf 空间.

(5.2) X 具有 σ 互不相交基. 设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{I}$ 关于欧氏拓扑的可数基, 则

$$\mathscr{B} \cup \{\{x\} : x \in B\}$$

是 X 的 σ 互不相交基. 由命题 1.7.12, X是 $\sigma^\sharp$ 空间.

(5.3) X 不是 β 空间. 否则, 由定理 1.7.7, X 是半层空间. 又由推论 1.4.5 和定理 1.2.11, X 是可展空间, 从而 X 是可度量空间. 但 X 是非可分的 Lindelöf 空间, 矛盾. 故 X 不是 β 空间.

例 1.8.6[15] Arens 空间 S_2.

取 $X = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. 记 $\mathscr{F} = \mathbb{N}^{<\omega}$. 以 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 表示从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 内的函数全体之集. 对 $n, m, k \in \mathbb{N}, F \in \mathscr{F}, f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, 置

$$V(n, m) = \{n\} \cup \{(n, k) : k \geqslant m\},$$

$$H(F,f)=\cup\{V(n,f(n)):n\in\mathbb{N}-F\}.$$

X 赋予下述拓扑称为 Arens 空间, 简记为 S_2: 对 $x\in X$, 取

$$\mathscr{N}_x=\begin{cases}\{\{x\}\}, & x\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\\ \{V(x,m):m\in\mathbb{N}\}, & x\in\mathbb{N},\\ \{\{x\}\cup H(F,f):F\in\mathscr{F},f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}, & x=0,\end{cases}$$

作为 x 的邻域基. 这时 X 是正则空间.

(6.1) X 是 g 第二可数空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $F_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 对 $x\in X$, 令

$$\mathscr{P}_x=\begin{cases}\mathscr{N}_x, & x\in\mathbb{N}\cup(\mathbb{N}\times\mathbb{N}),\\ \{\{x\}\cup(\mathbb{N}-F_n):n\in\mathbb{N}\}, & x=0.\end{cases}$$

那么 $\mathscr{P}_x$ 是 x 的弱基. 从而 X 是 g 第一可数的, 故 X 是 g 第二可数空间.

(6.2) X 是对称度量空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{U}_n=\{\{0\}\cup(\mathbb{N}-F_n)\}\cup\{V(x,n):x\in F_n\}\cup\{\{x\}:x\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}.$$

则 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的覆盖. 若 $x\in X$, 则

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\begin{cases}\{0\}\cup(\mathbb{N}-F_n), & x=0,\\ V(x,n), & x=m<n,\\ \{x\}, & x=(m,k),n>\max\{m,k\}.\end{cases}$$

于是 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的弱展开. 由命题 1.6.14, X 是对称度量空间.

应当注意的是, X 的子空间 $X-\mathbb{N}$ 既不是离散子空间, 也不含非平凡的收敛序列, 所以 $X-\mathbb{N}$ 不是序列空间. 这说明 g 第二可数性, g 第一可数性, g 可度量性, 对称度量性, 序列空间性都不是遗传性.

由推论 1.6.18, X 不是 Fréchet 空间.

(6.3) $X\times(\mathbb{P}\cup\{0\})$ 不是序列空间. 令

$$Y=X\times(\mathbb{P}\cup\{0\}),\ F=\{((i,j),1/i+\pi/j):i,j\in\mathbb{N}\}.$$

则 $F\subset Y$ 且 $(0,0)\in\overline{F}-F$, 所以 F 不是 Y 的闭集. 另一方面, 对 $S\in\mathscr{S}(Y)$, 记 $F\cap S=\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由于 $\{\pi_1(y_n)\}$ 在 X 中收敛, 于是 $\{\pi_1(y_n)\}$ 的第一个坐标仅取有限个值, 又由于 $\{\pi_2(y_n)\}$ 在 $\mathbb{P}\cup\{0\}$ 中收敛, 因此 $\{\pi_1(y_n)\}$ 的第二个坐标也仅取有限个值. 故 $F\cap S$ 是有限集, 从而 $F\cap S$ 是 Y 的闭集. 这表明 Y 不是序列空间, 所以对称度量性不是有限可积性. 因为 Y 不是 g 第一可数空间, 于是 0 在 X 的可数弱基与 0 在 $\mathbb{P}\cup\{0\}$ 的可数弱基之积不是 (0, 0) 在 Y 的可数弱基.

例 1.8.7[30]　序列扇 S_ω.

取 $X=\{0\}\cup(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. 对 $n,m,k\in\mathbb{N}, f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 置

$$W(n,m)=\{(n,k):k\geqslant m\},$$
$$L(f)=\cup\{W(n,f(n)):n\in\mathbb{N}\}.$$

X 赋予下述拓扑称为序列扇, 简记为 S_ω: 对 $x\in X$, 取

$$\mathscr{N}_x=\begin{cases}\{\{x\}\}, & x\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\\ \{\{x\}\cup L(f):f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}, & x=0,\end{cases}$$

作为 x 的邻域基. 这时 X 是正则空间.

(7.1) X 是 $\aleph_0$ 空间. 置

$$\mathscr{P}=\{\{x\}:x\in X\}\cup\{W(n,m):n,m\in\mathbb{N}\},$$

则 $\mathscr{P}$ 是 X 的可数 k 网, 所以 X 是 $\aleph_0$ 空间.

(7.2) X 是 Fréchet 空间. 若 $x\in\overline{A}\subset X$, 不妨设 $x\in\overline{A}-A$, 则 $x=0$. 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $W(n,1)\cap A$ 是无限集. 任取无限序列 $\{x_m\}\subset W(n,1)\cap A$, 则 $x_m\to x$. 因而 X 是 Fréchet 空间.

(7.3) X 是 M_1 空间. 由于 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是 X 的孤立点集, 于是 $\mathscr{N}_0$ 是 X 的闭包保持的开集族. 故 X 具有 σ 闭包保持基, 所以 X 是 M_1 空间.

(7.4) X 不是第一可数空间, 因为 X 在点 0 不具有可数邻域基.

X 同胚于可数个收敛序列的拓扑和的商空间. 由此, 可类似构造扇空间. 对 $\alpha<\omega_1$, 设 X_α 同胚于 $\mathbb{S}_1$, 其中 X_α 的极限点是 x_α. 对度量空间 $\bigoplus_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$ 的子空间 $A=\bigoplus_{\alpha<\omega_1}\{x_\alpha\}$, 形如 $(\bigoplus_{\alpha<\omega_1}X_\alpha)/A$ 的商空间称为扇空间, 记为 S_{ω_1}.

(7.5) S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网 [374].

让 s 是 S_{ω_1} 的聚点. 对 $\alpha<\omega_1$, 令 $Y_\alpha=X_\alpha-\{s\}$. 若 S_{ω_1} 具有点可数 cs^* 网 $\mathscr{P}$, 记 $\{P\in\mathscr{P}:s\in P$ 且有无限个 $\alpha<\omega_1$, 使 $Y_\alpha\cap P\neq\varnothing\}$ 为 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 于是可归纳地选取 S_{ω_1} 的子集 $\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$, 使 $y_n\in P_n-\{s\}$ 且不同的 y_n 属于不同的 Y_α. 那么 $\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 S_{ω_1} 的闭集. 令

$$V=S_{\omega_1}-\{y_n:n\in\mathbb{N}\},$$
$$\mathscr{F}=\{P\in\mathscr{P}:P\subset V\},$$
$$H=\cup\{F\in\mathscr{F}:s\in F\}.$$

若 $s\in P\in\mathscr{F}$, 则 $P\notin\{P_n:n\in\mathbb{N}\}$, 于是 P 仅与有限个 Y_α 相交, 从而 H 仅与可数个 Y_α 相交, 因此有 $\beta<\omega_1$, 使 $Y_\beta\cap H=\varnothing$. 设 $V\cap Y_\beta=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, 那么 $x_n\to s\in V$, 于是存在子列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $P\in\mathscr{F}$, 使 $\{s\}\cup\{x_{n_i}:i\in\mathbb{N}\}\subset P$, 故 $Y_\beta\cap H\neq\varnothing$, 矛盾. 所以 S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网.

例 1.8.8[275] Michael 空间.

$\beta\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的 Stone-Čech 紧化. 取定 $p \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, 令 $X = \mathbb{N} \cup \{p\}$. X 赋予 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间拓扑, 称为 Michael 空间. 显然, X 是正则空间. 由于 $\beta\mathbb{N}$ 的紧集或者是有限集, 或者基数为 $2^{\mathfrak{c}}$[101], 于是 X 的紧集是有限集, 故 X 不是序列空间.

(8.1) X 是 $\aleph_0$ 空间. 因为 X 的紧集是有限集, $\{\{x\} : x \in X\}$ 是 X 的可数 k 网, 所以 X 是 $\aleph_0$ 空间.

(8.2) X 是 M_1 空间. 由于 $\mathbb{N}$ 是 X 的孤立点集, p 的开邻域基是 X 的闭包保持集族, 于是 X 具有 σ 闭包保持基, 故 X 是 M_1 空间.

例 1.8.9[9] Alexandroff 双箭空间.

取 $X = \mathbb{I} \times \{0,1\} - \{(0,0),(1,1)\}$. 定义集合 X 的字典序 $<$ 如下: 对 $(a,b),(s,t) \in X, (a,b) < (s,t)$ 当且仅当 $a < s$, 或 $a = s$ 且 $b < t$. 全序集 $(X,<)$ 赋予序拓扑称为 Alexandroff 双箭空间, 或 Alexandroff-Urysohn 双箭空间.

对 $x = (a,b) \in X, x$ 的邻域基元形如: 若 $b = 0, ((a-1/n,1),x] = \{x\} \cup \{(s,t) : a - 1/n < s < a, t = 0,1\}$; 若 $b = 1, [x,(a+1/n,0)) = \{x\} \cup \{(s,t) : a < s < a + 1/n, t = 0,1\}$.

在分析 X 的性质之前, 先回忆右半开区间拓扑. 取 S 是实数集, 以 $\mathscr{B} = \{[a,b) : a,b \in S\}$ 为基生成 S 的拓扑, 称为右半开区间拓扑 [360]或 Sorgenfrey 直线拓扑 [359], 空间 S 称为 Sorgenfrey 直线. 显然, S 是可分的正则空间.

(9.1) S 是遗传 Lindelöf 空间.

记 τ^* 是 $\mathbb{R}$ 的欧氏拓扑. 设 $A \subset S$. 若 $\mathscr{B}$ 的子集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 覆盖 A, 令 $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{int}_{\tau^*}(U_\alpha)$, 则某可数集族 $\{\mathrm{int}_{\tau^*}(U_{\alpha_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 覆盖 U. 令 $B = A - U$. 若 $b \in B$, 则存在 $s_b > b$, 使 $(b,s_b) \cap B = \varnothing$. 从而 $\{(b,s_b) : b \in B\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中互不相交的开区间集, 于是 B 是可数的. 所以存在 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的可数子集覆盖 A. 故 A 是 Lindelöf 空间.

(9.2) S 是单调正规空间 [160].

设 F,K 是 S 中不相交的闭集. 对 $x \in F$, 取定

$$s_x = \begin{cases} +\infty, & (x,+\infty) \cap K = \varnothing, \\ \inf((x,+\infty) \cap K), & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $x < s_x$ 且 $[x,s_x) \cap K = \varnothing$. 令 $D(F,K) = \cup\{[x,s_x) : x \in F\}$. 则 $F \subset D(F,K) \in \tau(S)$. 为证 D 是 S 的单调正规算子, 只须验证 $\overline{D(F,K)} \subset S - K$. 设 $y \in K$, 存在 $z > y$, 使 $[y,z) \cap F = \varnothing$. 若 $x \in F$, 则 $[x,s_x) \cap [y,z) = \varnothing$, 所以 $[y,z) \cap D(F,K) = \varnothing$, 从而 $y \notin \overline{D(F,K)}$. 故 S 是单调正规空间.

(9.3) S 不是 β 空间.

先说明 S 不是可度量空间. 否则, S 是第二可数空间, 于是 $\mathscr{B}$ 的某可数集 $\{[a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 S 的基. 取 $c \in S - \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $c \in [a_m, b_m) \subset [c, c+1)$, 从而 $c = a_m$, 矛盾. 所以 S 不是可度量空间.

如果 S 是 β 空间, 设 g 是 S 的 β 函数. 不妨设 $g(n, x) \subset [x, x+1/n)$, 则 g 是 S 的可展函数. 事实上, 若 S 的点 x 及序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\{x, x_n\} \subset g(n, y_n)$, 则 $\{y_n\}$ 的任何子列有聚点且 $y_n \leqslant x, x_n < y_n + 1/n$, 于是 $y_n \to x$, 从而 $x_n \to x$. 因此, S 是可展空间, 所以 S 是可度量空间, 矛盾.

若实数集 S 赋予以 $\{(a, b] : a, b \in S\}$ 为基生成的拓扑, 则称 S 是左半开区间拓扑. 下面转入讨论 Alexandroff 双箭空间的性质.

(9.4) X 是不可度量的紧空间. 由于 X 的子空间 $(0, 1] \times \{1\}$ 具有右半开区间拓扑, 所以 X 不是可度量空间. 又由于 X 是具有上确界性质的全序集, 且 X 自身是闭区间 $[(0, 1), (1, 0)]$, 所以 X 是紧空间. 当然, 可直接证明 X 是紧空间. 因为右半开区间拓扑和左半开区间拓扑都是遗传 Lindelöf 空间, 所以 X 是遗传 Lindelöf 空间, 为此只须证明 X 的无限子集有聚点. 对 X 的无限集 Y, $\pi_1(Y)$ 作为 $\mathbb{I}$ 的无限集关于欧氏拓扑具有聚点 a, 于是 $(a, 0)$ 或 $(a, 1)$ 是 Y 在 X 的聚点.

(9.5) X 的闭集在 X 中具有可数邻域基. 由收敛引理, 只须验证 X 是 perfect 空间. 对 X 的非空开集 G, 存在由 X 的开集组成的 G 的覆盖 $\mathscr{G}$, 使 $\mathscr{G}$ 的每一元关于 X 的闭包含于 G 中. 因为 G 是 X 的 Lindelöf 子空间, 于是 $\mathscr{G}$ 的某可数子集覆盖 G. 从而 G 是 X 的 F_σ 集.

例 1.8.10[72] 存在局部紧空间 X, 满足

(1) X 具有由有限集组成的闭包保持覆盖;

(2) X 具有由既开且闭的紧集组成的点有限覆盖;

(3) X 不是次仿紧空间.

让 ω_2 是基数为 $\aleph_2$ 的第一个序数. 设 $X = \omega_2 \times \omega_2 - \{(0, 0)\}$. 对 $\alpha \in \omega_2 - \{0\}$, 置

$$H_\alpha = \omega_2 \times \{\alpha\}, V_\alpha = \{\alpha\} \times \omega_2.$$

X 赋予拓扑: 对 $\alpha \in \omega_2 - \{0\}$, $(0, \alpha)$ 的邻域基元形如 $\{(0, \alpha)\} \cup (H_\alpha - F)$, $F \in H_\alpha^{<\omega}$; $(\alpha, 0)$ 的邻域基元形如 $\{(\alpha, 0)\} \cup (V_\alpha - F)$, $F \in V_\alpha^{<\omega}$; X 的其余点是孤立点. 显然, X 是局部紧空间.

(10.1) 对 $(\alpha, \beta) \in X$, 定义 $F(\alpha, \beta) = \{(\alpha, \beta), (\alpha, 0), (0, \beta)\}$. 置

$$\mathscr{F} = \{F(\alpha, \beta) : 0 < \alpha, \beta < \omega_2\},$$

则 $\mathscr{F}$ 是 X 的闭包保持闭覆盖.

(10.2) 置

$$\mathscr{P} = \{H_\alpha : \alpha \in \omega_2 - \{0\}\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in \omega_2 - \{0\}\},$$

则 $\mathscr{P}$ 是 X 的由开闭紧集组成的点有限覆盖. 因此 X 是亚紧空间.

(10.3) 若 $A, B \subset X$, 且每一 $A \cap V_\alpha, B \cap H_\alpha$ 是可数的, 则 $X \neq A \cup B$. 否则, 让

$$\beta_0 = \sup\{\beta : (\alpha, \beta) \in A \cap V_\alpha, \alpha \in \omega_1\},$$

那么 $\beta_0 < \omega_2$ 且 X 的非空集 $\omega_1 \times (\omega_2 - (\beta_0 + 1))$ 与 A 不相交, 于是 $\omega_1 \times (\omega_2 - (\beta_0 + 1)) \subset B$. 取 $\delta \in \omega_2 - (\beta_0 + 1)$, 则 $\omega_1 \times \{\delta\} \subset B \cap H_\delta$, 矛盾.

设 X 的开覆盖 $\mathscr{P}$ 存在加细 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是离散的. 将 $\mathscr{P}_n$ 中分别含于 V_α 或 H_α 中的元素全体记为 $\mathscr{V}_n$ 和 $\mathscr{H}_n$, 那么 $\mathscr{P}_n = \mathscr{V}_n \cup \mathscr{H}_n$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置 $A_n = \cup\mathscr{H}_n, B_n = \cup\mathscr{V}_n$. 对 $\alpha \in \omega_2$, 存在 $(\alpha, 0)$ 的邻域交 $\mathscr{H}_n$ 至多一个元, 因此 V_α 仅交 $\mathscr{H}_n$ 的有限个元, 从而 $A_n \cap V_\alpha$ 是有限的. 类似地, $B_n \cap H_\alpha$ 是有限的. 所以, 由 (10.3), $X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n)$, 即 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 不是 X 的覆盖, 矛盾. 故 X 不是次仿紧空间.

本节的后一部分, 举几个说明空间类关于某些运算性质不保持的例. 首先, 讨论遗传性问题.

例 1.8.11 介于紧性和 β 空间性质之间的拓扑性质不是开遗传性质.

取集合 D, 使 $|D| > \mathbf{c}$. 由例 1.8.4, $\psi(D)$ 是非 β 空间的局部紧空间. 让 Z 是 $\psi(D)$ 的 Alexandroff 一点紧化, 那么 Z 是紧空间. 由于 Z 的开子空间 $\psi(D)$ 不是 β 空间, 因而介于紧性和 β 空间性质之间的拓扑性质不是开遗传性质.

其次, 说明对可积性为什么一般只讨论可数可积性.

例 1.8.12 $\mathbb{N}^{\omega_1}$ 不具有拓扑性质: 点 G_δ 性质, q 空间性质, β 空间性质.

记 $X = \mathbb{N}^{\omega_1}$. 显然, X不具有点 G_δ 性质.

(12.1) X 不是 q 空间. 若不然, 设 g 是 X 的 q 函数. 不妨设 $g(n, x)$ 是 X 的基本开集. 取 $z \in X$, 使对 $\alpha < \omega_1$, $\pi_\alpha(z) = 1$. 存在 $\beta < \omega_1$, 使对 $n \in \mathbb{N}$, $\pi_\beta(g(n, z)) = \mathbb{N}$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x_n \in X$, 满足

$$\pi_\alpha(x_n) = \begin{cases} 1, & \alpha \in \omega_1 - \{\beta\}, \\ n, & \alpha = \beta, \end{cases}$$

则 $x_n \in g(n, z)$, 但是 $\{x_n\}$ 没有聚点, 矛盾. 故 X 不是 q 空间.

(12.2) X 不是 β 空间. 若不然, 设 g 是 X 的 β 函数. 对 X 的基本开集 V, 置

$$R(V) = \{\alpha < \omega_1 : \pi_\alpha(V) \neq \mathbb{N}\}.$$

取 $x_1 \in X$, 使对 $\alpha < \omega_1$, $\pi_\alpha(x_1) = 1$. 让 V_1 是 x_1 的基本邻域 (即形如基本开集的邻域) 且 $V_1 \subset g(1, x_1)$. 取 $x_2 \in X$, 满足

$$\pi_\alpha(x_2) = \begin{cases} \pi_\alpha(x_1), & \alpha \in R(V_1), \\ 2, & \alpha \notin R(V_1). \end{cases}$$

让 V_2 是 x_2 的基本邻域且 $V_2 \subset g(2, x_2), R(V_1) \subset R(V_2)$. 利用归纳法, 可选取 X 的序列 $\{x_n\}$ 及基本邻域列 $\{V_n\}$, 满足

(i) $x_n \in V_n \subset g(n, x_n)$,

(ii) $R(V_n) \subset R(V_{n+1})$,

(iii)

$$\pi_\alpha(x_{n+1}) = \begin{cases} \pi_\alpha(x_n), & \alpha \in R(V_n), \\ n+1, & \alpha \notin R(V_n). \end{cases}$$

现在, 取 $x \in X$, 使

$$\pi_\alpha(x) = \begin{cases} \pi_\alpha(x_n), & \text{存在 } n \in \mathbb{N}, \text{ 使 } \alpha \in R(V_n), \\ 1, & \alpha \in \omega_1 - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(V_n), \end{cases}$$

则对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $x \in V_n \subset g(n, x_n)$. 若取 $\beta \in \omega_1 - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(V_n)$, 那么 $\pi_\beta(x_n) = n$, 于是 $\{x_n\}$ 没有聚点, 矛盾. 故 X 不是 β 空间.

最后一例说明定理 1.5.11 中的强 Σ 空间性质不可以用半度量性质替换. 先证明两条引理 [283].

引理 1.8.13(CH) 设 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是集合 X 上权 (weight) 不超过 $\mathbf{c}$ 的拓扑族, 其中 $|\Lambda| \leqslant \mathbf{c}$. 若 X 的可数集 A 不是 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$ 的一个可数子集的交, 则存在 X 的含 A 的不可数集 Y, 满足 Y 关于每一 τ_λ 是 Lindelöf 子空间.

证明 对 $\lambda \in \Lambda$, 设 $\mathscr{U}_\lambda$ 是空间 (X, τ_λ) 的基数不超过 $\mathbf{c}$ 的基, 不妨设 $\mathscr{U}_\lambda$ 关于可数并封闭. 置

$$\mathscr{U} = \{U \in \mathscr{U}_\lambda : A \subset U, \lambda \in \Lambda\}.$$

由 CH, $|\mathscr{U}| \leqslant \aleph_1$. 记 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$. 因为对 $\alpha < \omega_1$, $\bigcap_{\beta<\alpha} U_\beta - A$ 是不可数集, 可选取 X 的子集 $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, 使 $x_\alpha \in (\bigcap_{\beta<\alpha} U_\beta - \{x_\beta : \beta < \alpha\}) - A$. 令 $Y = A \cup \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 往证对 $\alpha \in \Lambda$, Y 是 (X, τ_λ) 的 Lindelöf 子空间. 设 τ_λ 的子集 $\mathscr{V}$ 覆盖 Y, 不妨设 $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}_\lambda$. 取 $\mathscr{V}$ 的覆盖 A 的可数集 $\mathscr{W}$, 令 $W = \cup\mathscr{W}$. 那么 $W \in \mathscr{U}$, 于是有 $\alpha < \omega_1$, 使 $W = U_\alpha$. 而 $Y - W$ 是可数的, 所以有 $\mathscr{V}$ 的可数集 $\mathscr{F}$ 覆盖 $Y - W$. 这时 $\mathscr{V}$ 的可数集 $\mathscr{W} \cup \mathscr{F}$ 覆盖 Y, 从而 Y 关于 τ_λ 是 Lindelöf 子空间.

例 1.8.14 存在 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑 τ_1 与 τ_2, 满足

(1) $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ 与 $(\mathbb{R}^2, \tau_2)$ 是两个同胚的正则半度量空间;

(2) 若 $\mathbb{Q}^2 \subset Z \subset \mathbb{R}^2$ 且 $|Z| = \mathbf{c}$, 则 $(Z, \tau_1) \times (Z, \tau_2)$ 不是正规空间;

(3) $\mathbb{Q}^2$ 不是 $\tau_1 \cup \tau_2$ 的可数子集之交集;

(4)(CH) 存在 $\mathbb{R}^2$ 的含 $\mathbb{Q}^2$ 的不可数集 Z, 使 $(Z, \tau_1), (Z, \tau_2)$ 是两个同胚的遗传 Lindelöf 空间.

证明 为了叙述方便起见, 例 1.8.2 所定义的 $Bt(x,1/n)$ 称为 x 的水平领结形邻域, 用类似方法可定义垂直领结形邻域. 以 τ_1,τ_2 分别表示 $\mathbb{R}^2$ 上由水平领结形邻域, 垂直领结形邻域生成的 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑.

(14.1) 由例 1.8.2, $(\mathbb{R}^2,\tau_1)$ 是正则半度量空间. 对应 $(x,y)\mapsto(y,x)$ 是 $(\mathbb{R}^2,\tau_1)$ 到 $(\mathbb{R}^2,\tau_2)$ 的同胚映射, 所以 $(\mathbb{R}^2,\tau_2)$ 也是正则的半度量空间.

(14.2) 设 $E=(Z,\tau_1)\times(Z,\tau_2)$, 那么 $\mathbb{Q}^2\times\mathbb{Q}^2$ 是 E 的可数稠集, 而 $\{(x,x):x\in Z\}$ 是 E 的基数为 $\mathbf{c}$ 的闭离散子空间. 由 Tietze 扩张定理, E 不是正规空间.

(14.3) 以 τ 表示 $\mathbb{R}^2$ 的欧氏拓扑. 若 $\mathbb{Q}^2\subset U\in\tau_1\cup\tau_2$, 那么 $\mathrm{int}_\tau(U)$ 在 $(\mathbb{R}^2,\tau)$ 中稠. 由 Baire 范畴定理, $\mathbb{Q}^2$ 不是 $(\mathbb{R}^2,\tau)$ 的可数个开稠集之交, 从而 $\mathbb{Q}^2$ 不是 $\tau_1\cup\tau_2$ 的可数子集之交.

(14.4)(CH) 由 (14.3) 及引理 1.8.13, 存在 $\mathbb{R}^2$ 的含 $\mathbb{Q}^2$ 的不可数集 Y, 使 Y 关于 τ_1,τ_2 都是 Lindelöf 子空间. 置 $Z=Y\cup Y^*$, 其中 $Y^*=\{(y,x):(x,y)\in Y\}$. 由于 Y 和 Y^* 关于 τ_1 是 Lindelöf 空间, 于是 Z 关于 τ_1 是 Lindelöf 空间. 又由于半度量空间是 perfect 空间, 所以 Z 关于 τ_1 是遗传 Lindelöf 空间. 显然, (Z,τ_1) 同胚于 (Z,τ_2), 因而 (Z,τ_2) 也是遗传 Lindelöf 空间.

由例 1.8.14 的 (2) 和 (4), 有下述推论.

推论 1.8.15[52, 283](CH) 存在正则遗传 Lindelöf 的半度量空间 Z, 使 Z^2 不是正规空间.

问题 1.8.16[283] 是否存在正则遗传 Lindelöf 的半度量空间 X, 使 X^2 不是正规空间?

问题 1.8.17[140] 是否存在非 σ 空间的正则遗传 Lindelöf 的半度量空间?

第二章　度量空间的映象

一般拓扑学的发展过程中, 由于各种数学领域的参与及本领域内部问题的动力, 产生了各式各样的拓扑空间类. 对这些看起来千姿百态的对象进行精细的分析和广泛的分类, 是一般拓扑学存在的必要条件, 并且是它主要的内部课题 [24]. 在 1961 年布拉格拓扑会议上, Alexandroff[3] 提出两类问题:

问题 2.0.1　什么空间类可以表为 "好的" 空间类 (如度量空间类, 零维空间类等) 在 "好的" 连续映射下的象?

问题 2.0.2　什么空间类可以由 "好的" 映射类映入 "好的" 空间类?

Alexandroff 问题是用映射对空间进行分类的思想, 导致了空间与映射相互分类的方法. Alexandroff[4] 和 Arhangel'skiĭ[24] 认为, 该方法的实质是下述三个密切联系的基本问题:

问题 2.0.3　在什么情况下, 某个特定类 $\mathscr{A}$ 中的每个空间, 在属于类 $\mathscr{F}$ 的映射作用下, 能够被映成类 $\mathscr{B}$ 中的某个空间?

问题 2.0.4　如果 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 是类 $\mathscr{A}$ 中的空间在属于类 $\mathscr{F}$ 的映射作用下的象空间全体, 那么类 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 中的空间具有怎样的内部特征?

问题 2.0.5　用 $\mathscr{F}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 表示一类映射, 其定义域与值域分别是类 $\mathscr{A}$, 类 $\mathscr{B}$ 中的空间, 设 $\mathscr{H}$ 是另一映射类, 则类 $\mathscr{F}(\mathscr{A},\mathscr{B})\cap\mathscr{H}$ 中的映射有哪些性质?

特别地, 上述的一般提法包含了下述问题:

问题 2.0.6　在各类映射作用下, 哪些拓扑性质保持不变?

空间与映射的分类原则, 或 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 问题的意义在于用映射作为工具揭示各种拓扑空间类的内在规律, 将映射作为纽带把五花八门的拓扑空间联结于一体. 实践表明 [4, 210], 这原则不仅仅给一般拓扑学中许多经典的课题灌输了新鲜血液, 而且产生了众多新的研究方向, 带来了 20 世纪 60 年代末期至整个 20 世纪 80 年代一般拓扑学的繁荣景象.

怎样的空间类可以视为是 Alexandroff 问题中 "好的" 空间类? 怎样的映射类可以看成是 Alexandroff 问题中 "好的" 映射类? 度量空间是研究问题的开端, 而商映射、伪开映射、开映射和闭映射确实达到了 "好的" 映射的要求. 本章跟随 Alexandroff 的思路, 研究度量空间在一些重要映射类下象或逆象的内在特征.

约定: §2.1 中映射指连续函数, §2.2∼§3.9 中映射均是连续的满函数.

2.1 映 射 类

本节叙述一些映射类的定义及基本性质. 映射类之间的关系是极为丰富的, 在此仅阐明以后各节需要的若干性质. 映射引理反映了映射间的转换关系.

定义 2.1.1 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为商映射 [43], 若 $U \subset Y$ 且 $f^{-1}(U) \in \tau(X)$, 则 $U \in \tau(Y)$;

(2) f 称为伪开映射 [20], 若对 $y \in Y$, $f^{-1}(y) \subset V \in \tau(X)$, 则 $y \in f(V)^\circ$;

(3) f 称为可数双商映射 [350], 若对 $y \in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的开集的可数族 $\mathscr{U}$, 存在 $P \in \mathscr{U}^F$, 使 $y \in f(P)^\circ$;

(4) f 称为开映射 [35], 若 $V \in \tau(X)$, 则 $f(V) \in \tau(Y)$;

(5) f 称为闭映射 [169], 若 $F \in \tau^c(X)$, 则 $f(F) \in \tau^c(Y)$.

先指出函数的两个基本关系. 设函数 $f: X \to Y$. 若 $A \subset X, B \subset Y$, 那么

(1) $f^{-1}(B) \subset A \Leftrightarrow B \subset Y - f(X - A)$;

(2) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

命题 2.1.2 (1) 开映射 $\Rightarrow$ 可数双商映射 $\Rightarrow$ 伪开映射 $\Rightarrow$ 商映射;

(2) 闭映射 $\Rightarrow$ 伪开映射.

证明 只须证闭映射 $\Rightarrow$ 伪开映射 $\Rightarrow$ 商映射. 设映射 $f: X \to Y$.

若 f 是闭映射, 如果 $y \in Y$ 及 $f^{-1}(y) \subset V \in \tau(X)$, 那么 $y \in Y - f(X - V) \subset f(V)$, 于是 $y \in f(V)^\circ$. 故 f 是伪开映射.

若 f 是伪开映射, 如果 $U \subset Y$ 及 $f^{-1}(U) \in \tau(X)$, 任给 $y \in U$ 有 $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U)$, 从而 $y \in U^\circ$, 因此 $U \in \tau(Y)$. 故 f 是商映射.

有例子说明并非伪开映射是开映射和闭映射的复合映射 [31]. 下面考虑一组对纤维附加条件的映射.

定义 2.1.3 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为紧映射 [390] (可数紧映射, L 映射, s 映射), 若 $y \in Y$, 则 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集 (可数紧集, Lindelöf 集, 可分集);

(2) f 称为边缘紧映射 [390] (边缘可数紧映射, 边缘 L 映射), 若 $y \in Y$, 则 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集 (可数紧集, Lindelöf 集);

(3) f 称为逆紧映射 [390], 若 f 是闭且紧的映射;

(4) f 称为逆可数紧映射, 若 f 是闭且可数紧的映射.

习惯上将 “perfect mapping”译为 “完备映射”. 本书按全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》(科学出版社, 1993) 统一译为 “逆紧映射”. 从而将 “quasi-perfect mapping” 译为 “逆可数紧映射”, 不使用术语 “拟完备映射”. 显然, 逆可数紧映射是可数双商映射.

定义 2.1.4 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为紧覆盖映射[280], 若 $K \in \mathscr{K}(Y)$, 则存在 $L \in \mathscr{K}(X)$, 使 $f(L) = K$;

(2) f 称为序列覆盖映射[350], 若 $S \in \mathscr{S}(Y)$, 则存在 $L \in \mathscr{K}(X)$, 使 $f(L) = S$;

(3) f 称为序列商映射[55], 若 $S \in \mathscr{S}(Y)$, 则存在 $L \in \mathscr{S}(X)$, 使 $f(L)$ 是 S 的子列.

提醒读者注意, 文献中冠以 "序列覆盖映射" (sequence-covering mappings) 之名的有些映射的含义是不同的. 下面给出一些映射类的等价条件.

命题 2.1.5[20] 设映射 $f: X \to Y$. f 是伪开映射当且仅当对 $B \subset Y, f_B$ 是商映射.

证明 设 f 是伪开映射. 对 $B \subset Y$, $f_B: f^{-1}(B) \to B$ 是伪开映射, 所以 f_B 是商映射.

反之, 对 $y \in Y$ 及 $f^{-1}(y) \subset V \in \tau(X)$, 若 $y \notin f(V)^\circ$, 让 $Z = Y - f(V)$. 如果 $y \in \overline{Z} - Z$, 令 $F = Z \cup \{y\}$, 那么 Z 不是 F 的闭集. 因为 f_F 是商映射, 所以 $f^{-1}(Z)$ 不是 $f^{-1}(F)$ 的闭集, 从而存在 $x \in \overline{f^{-1}(Z)} \cap f^{-1}(y)$, 因此 $y = f(x) \in f(\overline{f^{-1}(Z)})$, 故 $\overline{Z} \subset f(\overline{f^{-1}(Z)})$. 即, $y \in \overline{Y - f(V)} \subset f(\overline{f^{-1}(Y - f(V))}) \subset f(X - V)$, 于是 $f^{-1}(y) \cap (X - V) \neq \varnothing$, 矛盾. 故 f 是伪开映射.

伪开映射的上述等价叙述称为遗传商映射[20].

命题 2.1.6[55] 设映射 $f: X \to Y$. f 是序列商映射当且仅当对 $F \subset Y$, 若 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集 (序列开集), 那么 F 是 Y 的序列闭集 (序列开集).

证明 设 f 是序列商映射. 对 $F \subset Y$, 设 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集, 若 F 不是 Y 的序列闭集, 则 F 含序列 $\{y_n\}$, 使 $y_n \to y \in Y - F$, 于是存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_i}\}$ 及 X 的序列 $\{x_i\}$, 使 $x_i \in f^{-1}(y_{n_i})$ 且 $x_i \to x \in f^{-1}(y)$. 这时 $x \in f^{-1}(F)$, 从而 $y \in F$, 矛盾.

反之, 对 Y 的序列 $\{y_n\}$, 若 $y_n \to y$, 不妨设所有 $y_n \neq y$. 由于 $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 不是 Y 的序列闭集, 于是 $\cup\{f^{-1}(y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ 不是 X 的序列闭集, 而 $f^{-1}(y) \cup (\cup\{f^{-1}(y_n) : n \in \mathbb{N}\})$ 是 X 的序列闭集, 从而存在序列 $\{p_k\} \subset \cup\{f^{-1}(y_n) : n \in \mathbb{N}\}$, 使 $p_k \to x \in f^{-1}(y)$. 由于 $f^{-1}(y_n)$ 是序列闭集, 故至多有限个 p_k 属于 $f^{-1}(y_n)$, 因此存在子列 $\{y_{n_i}\}$ 及 $p_{k_i} \in f^{-1}(y_{n_i})$. 令 $L = \{x\} \cup \{p_{k_i} : i \in \mathbb{N}\}$, 则 $L \in \mathscr{S}(X)$ 且 $f(L)$ 含 $\{y\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的子列. 故 f 是序列商映射.

命题 2.1.7[101] 设映射 $f : X \to Y$. f 是闭映射当且仅当对 $y \in Y$ 及 $f^{-1}(y) \subset U \in \tau(X)$, 存在 $V \in \tau(Y)$, 使 $y \in V$ 且 $f^{-1}(V) \subset U$.

证明 设 f 是闭映射. 对 $y \in Y$ 及 $f^{-1}(y) \subset U \in \tau(X)$, 取 $V = Y - f(X - U)$, 那么 $y \in V \in \tau(Y)$ 且 $f^{-1}(V) \subset U$.

反之, 设 $F \in \tau^c(X)$. 对 $y \in Y - f(F)$, $f^{-1}(y) \subset X - F \in \tau(X)$, 于是存在

$V \in \tau(Y)$, 使 $y \in V$ 且 $f^{-1}(V) \subset X - F$, 从而 $V \cap f(F) = \varnothing$, 故 $f(F) \in \tau^c(Y)$. 所以 f 是闭映射.

命题 2.1.8[25] 设映射 $f : X \to Y$, $g : X \to Z$. 若 f 是逆紧映射, 则 $f\triangle g$ 是逆紧映射.

证明 置 $h = f\triangle g$. 则 h 可表为下述两映射之复合:

$$\mathrm{id}_X\triangle g : X \to X \times Z, f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z.$$

由于 id_X 分离 X 的点与闭集, 依对角线引理, $\mathrm{id}_X\triangle g$ 是闭嵌入, 从而是逆紧映射. 又由于 f, id_Z 都是逆紧映射, 于是 $f \times \mathrm{id}_Z$ 是逆紧映射. 故 h 是逆紧映射.

推论 2.1.9 设 Φ 是满足闭遗传性和有限可积性的拓扑性质. 若对空间 X, 存在一对一映射 $f : X \to Y$ 和逆紧映射 $g : X \to Z$, 其中 Y, Z 都具有性质 Φ, 则 X 具有性质 Φ.

证明 置 $h = f\triangle g : X \to Y \times Z$. 由命题 2.1.8, h 是逆紧映射, 而 h 又是一对一映射, 所以 h 是闭嵌入, 故 X 具有性质 Φ.

命题 2.1.10[61] 若 X 是紧空间, 则对任何空间 $Y, \pi_1 : Y \times X \to Y$ 是逆紧映射.

证明 显然, π_1 是紧映射. 若 $F \in \tau^c(Y \times X)$, 如果 $y \notin \pi_1(F)$, 则 $(\{y\} \times X) \cap F = \varnothing$, 于是存在 Y 中含 y 的开集 V, 使 $(V \times X) \cap F = \varnothing$, 从而 $V \cap \pi_1(F) = \varnothing$, 因此 $\pi_1(F) \in \tau^c(Y)$. 故 π_1 是闭映射.

本节第二部分讨论在一定条件下, 映射类之间更为精细的关系. 先介绍两个概念.

定义 2.1.11 (1) X 称为强 Fréchet 空间 [350], 若 $\{A_n\}$ 是 X 的递减的集列且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$, 则存在 $x_n \in A_n$, 使 $x_n \to x$.

(2) X 称为 k 空间 [118], 若对 $A \subset X$, 如果每一 $K \in \mathscr{K}(X)$ 有 $K \cap A \in \tau^c(X)$, 那么 $A \in \tau^c(X)$.

显然, 第一可数空间 $\Rightarrow$ 强 Fréchet 空间 $\Rightarrow$ Fréchet 空间 $\Rightarrow$ 序列空间 $\Rightarrow$ k 空间. 由定义, 强 Fréchet 空间是可加性和遗传性; k 空间是可加性, 开遗传性和闭遗传性.

命题 2.1.12 (映射引理) 设映射 $f : X \to Y$.

(1) 若 Y 是 k 空间, f 为紧覆盖映射, 则 f 是商映射 [280];

(2) 若 Y 是序列空间, f 为序列商或序列覆盖映射, 则 f 是商映射 [55, 350];

(3) 若 Y 是 Fréchet 空间, f 为商映射, 则 f 是伪开映射 [20, 115];

(4) 若 Y 是强 Fréchet 空间, f 为商映射, 则 f 是可数双商映射 [285];

(5) 若 X 是序列空间, f 为商映射, 则 f 是序列商映射 [55].

证明 (1) 设 $F\subset Y$, 且 $f^{-1}(F)\in\tau^c(X)$. 对 $K\in\mathscr{K}(Y)$, 存在 $L\in\mathscr{K}(X)$, 使 $f(L)=K$. 由于 $f^{-1}(F)\cap L\in\mathscr{K}(X)$, 于是 $F\cap K=f(f^{-1}(F)\cap L)\in\mathscr{K}(Y)\subset\tau^c(Y)$, 所以 $F\in\tau^c(Y)$. 故 f 是商映射.

(2) 若 f 是序列覆盖映射, 则 f 是商映射的证明同 (1), 只须将 (1) 中的 $\mathscr{K}(Y)$ 换为 $\mathscr{S}(Y)$. 若 f 是序列商映射, 设 $F\subset Y$, 且 $f^{-1}(F)\in\tau^c(X)$, 则 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集. 由命题 2.1.6, F 是 Y 的序列闭集, 所以 $F\in\tau^c(Y)$. 因而 f 是商映射.

(3) 对 $y\in Y$ 及 $f^{-1}(y)\subset V\in\tau(X)$, 若 $y\in Y-f(V)^\circ=\overline{Y-f(V)}$, 则存在序列 $\{y_n\}\subset Y-f(V)$, 使 $y_n\to y$. 置

$$Z=\{y_n:n\in\mathbb{N}\},F=f^{-1}(Z).$$

那么 $\overline{F}\subset f^{-1}(\overline{Z})=F\cup f^{-1}(y)$. 因为 $f^{-1}(y)\subset V$, 且 $V\cap F=\varnothing$, 所以 $f^{-1}(y)\cap\overline{F}=\varnothing$, 从而 $F\in\tau^c(X)$, 于是 $f^{-1}(Y-Z)=X-F\in\tau(X)$, 因此 $Y-Z\in\tau(Y)$, 矛盾. 故 $y\in f(V)^\circ$, 所以 f 是伪开映射.

(4) 若 f 不是可数双商映射, 则存在 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$ 的开集的可数族 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 使对 $n\in\mathbb{N},y\in Y-f(\bigcup_{i\leqslant n}U_i)^\circ=\overline{Y-f(\bigcup_{i\leqslant n}U_i)}$. 由于 Y 是强 Fréchet 空间, 存在 $y_n\in Y-f(\bigcup_{i\leqslant n}U_i)$, 使 $y_n\to y$. 令 $E=\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$, $F=\{y\}\cup E$. 由 (3) 和命题 2.1.5, f_F 是商映射. 由于 E 不是 F 的闭集, 所以 $f^{-1}(E)$ 不是 $f^{-1}(F)$ 的闭集, 于是存在 $x\in\overline{f^{-1}(E)}\cap f^{-1}(y)$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $x\in U_m$, 因此有 $k\geqslant m$, 使 $f^{-1}(y_k)\cap U_m\neq\varnothing$, 那么 $y_k\in f(U_m)$, 矛盾. 故 f 是可数双商映射.

(5) 若 $F\subset Y$ 且 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集, 则 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集, 从而 F 是 Y 的闭集, 于是 F 是 Y 的序列闭集. 由命题 2.1.6, f 是序列商映射.

命题 2.1.13 设映射 $f:X\to Y$, 其中 X 具有点 G_δ 性质. 若下述条件之一成立, 则 f 是序列商映射.

(1) f 是序列覆盖映射;

(2) f 是闭映射, X 是正则空间 [247].

证明 (1) 设 $S\in\mathscr{S}(Y)$. 存在 $K\in\mathscr{K}(X)$, 使 $f(K)=S$. 记 $S=\{y\}\cup\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$, 其中 $y_n\to y$. 取定 $x_n\in f^{-1}(y_n)\cap K$. 由定理 1.7.7, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$, 使 $x_{n_i}\to x\in f^{-1}(y)$. 从而 f 是序列商映射.

(2) 对 Y 中收敛于 y 的非平凡序列 $\{y_n\}$, 取定 $x_n\in f^{-1}(y_n)$. 由于 f 是闭映射, $\{x_n\}$ 的任何子列有聚点. 让 x 是 $\{x_n\}$ 的聚点且 $\{V_n\}$ 是 x 的开邻域列, 使 $\overline{V}_{n+1}\subset V_n$ 且 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$. 取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{t_k\}$, 使 $t_k\in V_k$. 让 p 是 $\{t_k\}$ 的任一子列的聚点, 那么 $p\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{V}_k$, 于是 $p=x$. 这说明 x 是 $\{t_k\}$ 的唯一聚点, 所以 $\{t_k\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列. 故 f 是序列商映射.

引理 2.1.14[279, 285] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是正规或可数仿紧空间. 如果 Y 是 q 空间或强 Fréchet 空间, 那么 f 是边缘可数紧映射.

证明 若存在 $y \in Y$, 使 $\partial f^{-1}(y)$ 不是 X 的可数紧集, 则 $\partial f^{-1}(y)$ 有可数闭离散子空间 $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. 由于 X 是正规或可数仿紧空间, 存在 X 的局部有限的开集族 $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$, 使 $x_i \in V_i$ (见附录 A 定理 1.11).

(1) 设 Y 是 q 空间. 让 g 是 Y 的 q 的函数. 因为 $x_i \in \partial f^{-1}(y)$, 由归纳法可选取 $z_1 \in V_1 \cap f^{-1}(g(1,y)) - f^{-1}(y), z_{i+1} \in V_{i+1} \cap f^{-1}(g(i+1,y)) - f^{-1}(\{y, f(z_1), \cdots, f(z_i)\})$. 由于 $f(z_i) \in g(i,y), \{f(z_i)\}$ 有聚点. 然而 $z_i \in V_i$ 且 f 是闭映射, 于是 $\{f(z_i)\}$ 无聚点, 矛盾.

(2) 设 Y 是强 Fréchet 空间. 由于 $x_i \in V_i \cap \partial f^{-1}(y)$, 所以

$$y \in \overline{f(V_i) - \{y\}} \subset \overline{f(\bigcup_{j \geqslant i} V_j) - \{y\}}.$$

于是存在 $y_i \in f(\bigcup_{j \geqslant i} V_j) - \{y\}$, 使 $y_i \to y$. 因为 $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是局部有限集族且 f 是闭映射, 存在 $\{y_i\}$ 的子列 $\{y_{i_k}\}$, 使 $\{y_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 是 Y 的闭离散集, 矛盾.

引理 2.1.15[279] 设 $f: X \to Y$ 是满映射, 则存在 X 的闭子空间 Z 满足: 对 $y \in Y$, $(f_{|Z})^{-1}(y)$ 或者是单点集, 或者是非空集 $\partial f^{-1}(y)$.

证明 对 $y \in Y$, 取定 $p_y \in f^{-1}(y)$. 置

$$Z = \cup\{\partial f^{-1}(y) : \partial f^{-1}(y) \neq \varnothing\} \cup \{p_y : \partial f^{-1}(y) = \varnothing\}.$$

由于

$$X - Z = (\cup\{f^{-1}(y)^\circ : \partial f^{-1}(y) \neq \varnothing\}) \cup (\cup\{f^{-1}(y)^\circ - \{p_y\} : \partial f^{-1}(y) = \varnothing\}),$$

$Z \in \tau^c(X)$. 显然, 对 $y \in Y$, $(f_{|Z})^{-1}(y)$ 或者是单点集, 或者是非空集 $\partial f^{-1}(y)$.

命题 2.1.16[279] 设 X 是仿紧空间. 若 $f: X \to Y$ 是满的闭映射, 则 f 是紧覆盖映射.

证明 对 Y 的非空紧集 K, 由引理 2.1.14, f_K 是边缘紧映射, 再由引理 2.1.15, 存在 $f^{-1}(K)$ 的闭子空间 L, 使 $f_{K|L}$ 是逆紧满映射, 于是 $L \in \mathscr{K}(X)$ 且 $f(L) = K$.

因为正则 Lindelöf 空间是仿紧空间, 由命题 2.1.16, 正则空间的满且闭的 L 映射是紧覆盖映射.

问题 2.1.17[290] 特征空间 Y, 使每一满的闭映射 $f: X \to Y$ 是可数双商映射.

引理 2.1.14 导出一般性问题.

问题 2.1.18[381] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 空间 X 或 Y 附加什么条件, 对每一 $y \in Y, \partial f^{-1}(y)$ 具有较好性质?

定理 2.2.2, 引理 2.7.20, 定理 3.4.16 和 3.8.17, 推论 3.8.18 等均与这问题相关.

2.2 逆紧映象

逆紧映射在映射理论中的重要性, 正如紧空间在一般拓扑学中所起的作用一样, 是无可非议的. 本节的主要目的是给出度量空间关于逆紧映射的象和逆象的刻画, 由此导入系列的广义度量空间, 如 p 空间, 相关的度量化定理, 同时介绍了刘应明和刘立榆 [264]关于粘着空间的度量化定理.

定理 2.2.1[304, 363] 逆紧映射保持可度量性.

证明 设 $f: X \to Y$ 是逆紧映射, 其中 X 是可度量空间. 由 Stone 定理, X 是仿紧空间, 从而 Y 是仿紧空间 (见附录 A 推论 1.3). 为了证明 Y 是可度量空间, 只须证 Y 是可展空间. 由定理 1.3.5, 存在 X 的展开 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$. 这时,

(1.1) 对 X 的非空紧集 $K, \{\mathrm{st}(K, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基.

对 $y \in Y, n \in \mathbb{N}$, 置

$$U_{yn} = \mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{U}_n),$$
$$W_{yn} = Y - f(X - U_{yn}),$$
$$V_{yn} = f^{-1}(W_{yn}).$$

那么 $f^{-1}(y) \subset U_{yn}$. 从而,

(1.2) $y \in W_{yn}, f^{-1}(y) \subset V_{yn} \subset U_{yn}$.

(1.3) $\{W_{yn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y 的局部基.

由于 f 是闭映射, W_{yn} 是 Y 的开集. 设 W 是 y 的开邻域, 那么 $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W)$. 由 (1.1), 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{U}_n) \subset f^{-1}(W)$, 即 $U_{yn} \subset f^{-1}(W)$, 于是 $W_{yn} \subset W$. (1.3) 得证.

由 (1.2), $f^{-1}(y) \subset V_{yn+1}$, 再由 (1.1), 存在 $m \geqslant n+1$, 使 $U_{ym} \subset V_{yn+1}$.

(1.4) 若 $y \in W_{zm}$, 则 $W_{zm} \subset W_{yn}$.

取定 $x \in f^{-1}(y)$. 由于 $f^{-1}(y) \subset V_{zm} \subset U_{zm}$, 则 $x \in \mathrm{st}(f^{-1}(z), \mathscr{U}_m)$, 从而存在 $U_x \in \mathscr{U}_m$, 使 $x \in U_x$ 且 $\varnothing \neq f^{-1}(z) \cap U_x \subset f^{-1}(z) \cap U_{ym} \subset f^{-1}(z) \cap V_{yn+1}$, 于是 $z \in f(V_{yn+1}) = W_{yn+1}$, 所以有 (*): $f^{-1}(z) \subset V_{yn+1}$. 下面证明 $W_{zm} \subset W_{yn}$.

设 $t \in W_{zm}$. 若 $s \in f^{-1}(t)$, 由于 $f^{-1}(t) \subset U_{zm}$, 所以 $s \in \mathrm{st}(f^{-1}(z), \mathscr{U}_m)$, 于是存在 $U_s \in \mathscr{U}_m$, 使 $s \in U_s$ 且 $f^{-1}(z) \cap U_s \neq \varnothing$. 取 $s' \in f^{-1}(z) \cap U_s$. 由于 (*), $f^{-1}(z) \subset U_{yn+1}$, 那么 $s' \in \mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{U}_{n+1})$, 则存在 $U_{s'} \in \mathscr{U}_{n+1}$, 使 $s' \in U_{s'}$ 且 $f^{-1}(y) \cap U_{s'} \neq \varnothing$, 从而 $s' \in U_s \cap U_{s'}$. 再取 $s'' \in f^{-1}(y) \cap U_{s'}$. 因为 $\mathscr{U}_m$ 加细 $\mathscr{U}_{n+1}$, 所以 $s, s'' \in U_s \cup U_{s'} \subset \mathrm{st}(U_{s'}, \mathscr{U}_{n+1})$, 又因为 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$, 存在 $V_{s'} \in \mathscr{U}_n$, 使 $s \in \mathrm{st}(U_{s'}, \mathscr{U}_{n+1}) \subset V_{s'} \subset \mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{U}_n) = U_{yn}$. 故 $f^{-1}(t) \subset U_{yn}$, 所以 $t \in W_{yn}$. 即, $W_{zm} \subset W_{yn}$.

对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{W}_n=\{W_{yn}\}_{y\in Y}$. 对 $y\in Y$ 及 y 的邻域 W, 由 (1.3), 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $W_{yn}\subset W$. 再由 (1.4), 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(y,\mathscr{W}_m)\subset W_{yn}$. 所以 $\{\mathrm{st}(y,\mathscr{W}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y 的局部基. 故 $\{\mathscr{W}_n\}$ 是 Y 的展开, 所以 Y 是可展空间.

提醒读者注意, 若 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, $\{Y-f(X-U):U\in\mathscr{U}\}$ 未必是 Y 的覆盖. 取 $X=\mathbb{I}\times\{0,1\}$. 赋予 X 欧氏子空间拓扑. 让 $A=\{(0,0),(0,1)\}$, $Y=X/A$, 定义 $f:X\to Y$ 是自然商映射. 则 f 是逆紧映射. 令 $\mathscr{U}=\{\mathbb{I}\times\{0\},\mathbb{I}\times\{1\}\}$. 则 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 并且对 $U\in\mathscr{U}$, $f(0,0)\notin Y-f(X-U)$.

度量空间 $\mathbb{S}_1\times\mathbb{N}$ 的闭映象 $\mathbb{S}_1\times\mathbb{N}/(\{0\}\times\mathbb{N})$ 同胚于序列扇 S_ω, 于是为使度量空间的闭映象是可度量空间须附加一些条件.

定理 2.2.2 (Hanai-Morita-Stone 定理)　设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. 下述条件等价:

(1) Y 是可度量空间;

(2) Y 是强 Fréchet 空间 [285];

(3) f 是边缘紧映射 [304, 363];

(4) f 是可数双商映射 [285].

证明　由定理 2.2.1, 引理 2.1.14, 2.1.15 和映射引理 (命题 2.1.12), 只须证可数双商映射保持强 Fréchet 性质. 对 Y 中递减的集列 $\{A_n\}$, 若 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在 $x\in f^{-1}(y)$, 使 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}(A_n)}$. 否则, $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X-\overline{f^{-1}(A_n)})$, 于是有 $m\in\mathbb{N}$, 使 $y\in f(X-\overline{f^{-1}(A_m)})^\circ$, 从而 $\varnothing\neq A_m\cap f(X-\overline{f^{-1}(A_m)})$, 矛盾. 所以存在 $x_n\in f^{-1}(A_n)$, 使 $x_n\to x$, 故 $f(x_n)\in A_n$ 且 $f(x_n)\to y$.

上述结果已是 Hanai-Morita-Stone 定理的变形. 事实上, Hanai-Morita-Stone 定理叙述为: 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间, 则 Y 是度量空间当且仅当 Y 是第一可数空间, 当且仅当 f 是边缘紧映射. 它的原形是 Vaĭnšteĭn[390] 的结果: 度量空间到度量空间的闭映射是边缘紧映射. Hanai-Morita-Stone 定理也称为 Morita-Hanai-Stone 定理.

对不相交的拓扑空间 X 与 Y, 设 A 是 X 的闭集, $f:A\to Y$ 是连续函数. 将 $X\oplus Y$ 的每对点 $x,f(x)$ $(\forall x\in A)$ 粘合得到 $X\oplus Y$ 的商空间 Z. 称 Z 为粘着空间 (或附贴空间, 贴附空间), 自然商映射 $p:X\oplus Y\to Z$ 称为粘着映射 [60]. 常记 Z 为 $X\cup_f Y$. 粘着空间的度量化可作为定理 2.2.2 的一个应用.

回忆自然映射 (或显然映射) 的概念. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的覆盖. 让 $Z=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$. 对 $\alpha\in\Lambda$, 记 Z 的子空间 X_α 到 X 的子空间 X_α 的同胚为 h_α. 映射 $h:Z\to X$ 称为自然映射, 若每一 $h_{|X_\alpha}=h_\alpha$.

定理 2.2.3[58, 264]　设 X,Y 是度量空间. $X\cup_f Y$ 是可度量空间当且仅当

$X \cup_f Y$ 是第一可数空间.

证明 令 $Z = X \cup_f Y$. 设 Z 是第一可数空间. 由映射引理, p 是伪开映射. 令 $X_1 = \mathrm{cl}_X(X - A)$, $Z_1 = \mathrm{cl}_Z p(X - A)$.

(3.1) 如果 B 是 X_1 的闭集, 则 $f(B)$ 是 Y 的闭集.

设 $y \in Y - f(B)$, 存在 X 中不相交的开集 U, V 分别包含 B 和 $f^{-1}(y)$. 让 $W = V \cup Y$, $G = p(W)^\circ$. 则 W 是 $X \oplus Y$ 中 $p^{-1}p(y) = \{y\} \cup f^{-1}(y)$ 的邻域, 于是 $p(y) \in G$, 所以 $p^{-1}(G) \cap (U - A) = \varnothing$. 由于 $B \subset \mathrm{cl}_X(U - A)$, 从而 $p^{-1}(G) \cap f(B) = \varnothing$. 故 $f(B)$ 是 Y 的闭集.

(3.2) $p_1 = p_{|X_1} : X_1 \to Z_1$ 是闭映射.

易验证, $Z_1 = p(X - A) \cup \{y \in Y : f^{-1}(y) \cap \partial A \neq \varnothing\}$, 所以 $p(X_1) = Z_1$. 由 (3.1) 及 $p_{1|X-A} = \mathrm{id}_{X-A}$, p_1 是闭映射.

(3.3) $X \cup_f Y$ 是可度量空间.

由 (3.2) 和定理 2.2.2, Z_1 是 $X \cup_f Y$ 的可度量的闭子空间. 由于 $p(Y)$ 同胚于 Y, 所以 $p(Y)$ 是 $X \cup_f Y$ 的可度量的闭子空间. 让 $q : p(Y) \oplus Z_1 \to X \cup_f Y$ 是自然映射. 则 q 是逆紧映射. 再由定理 2.2.1, $X \cup_f Y$ 是可度量空间.

例 2.2.4[264] 粘着空间.

(1) 取 $X = \mathbb{I}^2 - \{(0,0),(1,0)\}$, $Y = \mathbb{I}$. 赋予 X, Y 欧氏子空间拓扑. 令 $A = \{(x,0) : 0 < x < 1\}$, 定义 $f : A \to Y$ 为 $f(x,0) = x$. 则每一 $f^{-1}(y)$ 是紧集. 由于 $f(A) = (0,1)$ 不是 Y 的闭集, 由定理 2.2.3(3.1), $X \cup_f Y$ 不是第一可数空间.

(2) X 及 A 如 (1) 所定义. 取 $Y = \{0\}$. 定义 $f : A \to Y$ 为 $f(A) = \{0\}$. 采用定理 2.2.3 证明中的记号, 则 $X_1 = X, Z_1 = Z$ 且 $p_1 : X_1 \to Z_1$ 是闭映射. 由于 $\partial p_1^{-1}(0) = A$ 不是 X_1 的紧集, 所以 Z_1 不是可度量空间.

逆紧映射的逆象简记为逆紧逆象, 逆可数紧映射的逆象简记为逆可数紧逆象. 下面介绍度量空间关于逆紧逆象的特征.

引理 2.2.5[140, 388] 若空间 X 存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$, 则 X 有伪距离 d 满足:

(1) 对 $y \in X, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 当且仅当 $d(x,y) = 0$;

(2) U 是 (X,d) 的开集当且仅当对 $x \in U$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \subset U$.

证明 记 $\mathscr{U}_0 = \{X\}$. 对 $x, y \in X$, 定义

$$D(x,y) = \inf\{2^{-n} : y \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\},$$

$$d(x,y) = \inf\{\sum_{i=0}^{n} D(x_i, x_{i+1}) : n \in \mathbb{N}, x_i \in X, x_0 = x \text{ 且 } x_{n+1} = y\}.$$

则 d 是 X 的伪距离, 并且由归纳法可知, 对 $n \geqslant 2$ 有

$$D(x,y)\leqslant 2D(x,x_1)+4\sum_{i=1}^{n-1}D(x_i,x_{i+1})+2D(x_n,y).$$

从而 $D(x,y)/4\leqslant d(x,y)\leqslant D(x,y)$, 于是 (1) 成立. 对 $x\in X,n\in\mathbb{N}$, 有

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+2})=\mathrm{B}(x,1/2^{n+2})\subset\mathrm{B}(x,1/2^n)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n).$$

因此 (2) 成立.

定理 2.2.6[301] (Morita 定理)　X 是度量空间的逆可数紧逆象当且仅当 X 是 M 空间.

证明　必要性. 设 $f:X\to Y$ 是逆可数紧映射, 其中 Y 是度量空间. 则存在 Y 的展开 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $\mathscr{F}_n=f^{-1}(\mathscr{U}_n)$, 则 $\mathscr{F}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{F}_n$. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)$, 那么 $f(x_n)\in\mathrm{st}(f(x),\mathscr{U}_n)$, 于是 $f(x_n)\to f(x)$. 由于 f 是逆可数紧映射, 所以 $\{x_n\}$ 有聚点. 故 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的 M 序列. 因此 X 是 M 空间.

充分性. 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 M 序列. 由引理 2.2.5, 存在 X 的伪距离 d, 满足

(6.1) 对 $y\in X,y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 当且仅当 $d(x,y)=0$;

(6.2) U 是 (X,d) 的开集当且仅当对 $x\in U$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)\subset U$.

定义 X 的等价关系 "$\sim$": 对 $x,y\in X,x\sim y$ 当且仅当 $d(x,y)=0$. 设商集 $Y=X/\sim$, 再定义 $\rho:Y\times Y\to\mathbb{R}^+$ 为 $\rho([x],[y])=d(x,y)$, 则 (Y,ρ) 是度量空间. 往证自然投射 $f:X\to Y$ 是逆可数紧映射. 对 $x\in X,\varepsilon>0$, 由于 $f^{-1}(B_\rho([x],\varepsilon))=\mathrm{B}_d(x,\varepsilon)\in\tau(X)$, f 是连续函数.

断言: $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是集 $[x]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 在 X 的邻域基. 由于 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$, 所以 $\mathrm{st}^2(x,\mathscr{U}_{n+1})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 于是 $\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1})}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$. 由收敛引理, $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可数紧闭集 $[x]$ 在 X 的邻域基. 一方面, $f^{-1}([x])=[x]$ 是 X 的可数紧集. 另一方面, 设 $H\in\tau^c(X)$, 若 $x\notin f^{-1}f(H)$, 那么 $[x]\cap H=\varnothing$, 于是存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)\cap H=\varnothing$. 如果 $y\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{m+1})$, 则 $\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_{m+1})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)$, 因而 $[y]\cap H=\varnothing$, 所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{m+1})\cap f^{-1}f(H)=\varnothing$, 从而 $f^{-1}f(H)\in\tau^c(X)$, 故 $f(H)\in\tau^c(Y)$. 因此 f 是逆可数紧映射.

由仿紧空间的性质, 有下述推论.

推论 2.2.7[301]　X 是度量空间的逆紧逆象当且仅当 X 是仿紧 M 空间.

推论 2.2.8[309]　仿紧 M 空间是强 Σ 空间.

证明　设 X 是仿紧 M 空间, 则存在度量空间 Y 和逆紧映射 $f:X\to Y$. 让 $\mathscr{B}$ 是 Y 的 σ 局部有限基, $\mathscr{K}=\{f^{-1}(y):y\in Y\}$, 那么 $f^{-1}(\mathscr{B})^-$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 局部有限闭 (mod$k$) 网. 故 X 是强 Σ 空间.

M 空间和仿紧 M 空间分别刻画了度量空间的逆可数紧逆象和逆紧逆象. 这些空间正是 Alexandroff 问题中所寻求的空间. 本节的第二部分, 讨论它们的刻画及度量化问题.

定义 2.2.9[13] X 称为次可度量空间, 若 X 是某一度量空间的一对一映射的逆象.

显然, X 是次可度量空间等价于 X 有较粗的度量拓扑. 次可度量空间是具有 G_δ^* 对角线的 $\sigma^\sharp$ 空间. 次可度量性是可加性, 遗传性和可数可积性.

命题 2.2.10[269] X 是次可度量空间当且仅当 X 具有 G_δ 对角线序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$.

证明 设 X 是次可度量空间, 则存在度量空间 Y 和一对一映射 $f: X \to Y$. 让 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 Y 的展开且 $\mathscr{F}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{F}_n$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $\mathscr{U}_n = f^{-1}(\mathscr{F}_n)$. 则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列且 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$.

反之, X 存在伪距离 d 满足引理 2.2.5 的条件 (1) 和 (2). 由于 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列, 所以对 $x, y \in X, d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$. 故 d 是 X 的距离. 又由于 $\mathrm{B}_d(x,\varepsilon)$ 是 X 的开集, 所以 d 导出的度量拓扑粗于 X 的拓扑.

推论 2.2.11[56] 具有 G_δ 对角线的仿紧空间是次可度量空间.

定理 2.2.12[80] X 是可度量空间当且仅当 X 是具有 G_δ 对角线的 M 空间.

证明 只须证充分性. 由 Morita 定理和 Chaber 定理, 存在度量空间 Z 和逆紧映射 $g: X \to Z$, 于是 X是仿紧空间. 再由推论 2.2.11, 存在度量空间 Y 和一对一的映射 $f: X \to Y$. 又由推论 2.1.9, X 是度量空间.

上述定理可重新叙述: 度量空间的逆紧 (逆可数紧) 逆象是度量空间当且仅当它具有 G_δ 对角线. 为了叙述方便起见, 称拓扑性质 Φ 满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理, 若 $f: X \to Y$ 是逆紧映射, 其中 X 是具有 G_δ 对角线的正则空间, Y 具有性质 Φ, 则 X 也具有性质 Φ.

例 2.2.13 Alexandroff 双箭空间 (例 1.8.9): $\mathbb{I}$ 关于有限到一闭映射的逆象.

仍采用例 1.8.9 的记号. 对 Alexandroff 双箭空间 X, 取 $f: X \to \mathbb{I}$ 是投影映射, 其中 $\mathbb{I}$ 具欧氏拓扑. 则 f 是至多二到一的闭映射.

Alexandroff 双箭空间不具有 G_δ 对角线. 这说明对广义度量空间类 $\mathscr{C}$, 其中 $\mathscr{C}$ 的元具有 G_δ 对角线, 在讨论 $\mathscr{C}$ 关于逆紧逆象保持时, 一般应附加 G_δ 对角线条件. 这正是 “逆紧逆象 G_δ 对角线定理” 的由来. 当然, 也可相应地讨论所谓 “逆紧逆象 $\sigma^\sharp$ 定理” 等. 由于情况类似, 不再赘述.

本节最后介绍仿紧 M 空间的一些等价条件.

定义 2.2.14[19] 完全正则空间 X 称为 p 空间, 若存在 βX 中开集族的序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足

(1) $\mathscr{U}_n$ 覆盖 X;

(2) 对 $x \in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset X$;

如果更设

(3) 对 $x \in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$,

则 X 称为严格 p 空间. 上述覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 分别称为 X 的 p 构造和严格 p 构造.

由于局部紧空间是其极大紧化的开集, 所以局部紧空间是 p 空间. 严格 p 空间和 p 空间有便于使用的内在刻画.

命题 2.2.15[78]　完全正则空间 X 是严格 p 空间当且仅当 X 存在严格 p 序列, 即存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足

(1) 对 $x \in X$, $C_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 是 X 的紧集;

(2) 对 $x \in X, \{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 C_x 在 X 的邻域基.

证明　必要性. 设 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的严格 p 构造. 不妨设 $\mathscr{F}_{n+1}$ 部分加细 $\mathscr{F}_n$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n = \mathscr{F}_{n|X}$. 往证 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的严格 p 序列.

(15.1) 对 $x \in X, C_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)}$ 是 βX 的含于 X 内的闭集, 所以 C_x 是 X 的紧集.

(15.2) 对 $x \in X$ 及 $C_x \subset U \in \tau(X)$, 存在 $G \in \tau(\beta X)$, 使 $G \cap X = U$, 那么 $\{G\} \cup \{\beta X - \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)} : n \in \mathbb{N}\}$ 覆盖紧空间 βX, 从而存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_m)} \subset G$, 于是 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \subset G$, 所以 $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 C_x 在 X 的邻域基.

充分性. 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的严格 p 序列. 对 $n \in \mathbb{N}$, 取 $\mathscr{F}_n \subset \tau(\beta X)$, 使 $\mathscr{F}_{n|X} = \mathscr{U}_n$. 则 $\mathscr{F}_n$ 是 X 的覆盖. 对 $x \in X, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)}$. 若 $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)} - C_x$, 取 $W \in \tau(\beta X)$, 使 $y \in W$ 且 $\overline{W} \cap C_x = \varnothing$. 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \cap \overline{W} = \varnothing$, 于是 $\overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_m)} \cap W = \varnothing$, 从而 $y \notin \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_m)}$, 矛盾. 故 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)} \subset C_x$. 因此 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)} \subset X$.

由此, 具有严格 p 序列的空间是 $\mathrm{w}\Delta$ 空间. 显然, 严格 p 序列性质是可数可积性.

定理 2.2.16[66]　完全正则空间 X 是 p 空间当且仅当 X 存在 p 序列, 即存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足: 对 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, 若 $x \in U_n \in \mathscr{U}_n$, 则

(1) $D_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n$ 是 X 的紧集;

(2) $\{\bigcap_{n\leqslant k} \overline{U}_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 D_x 在 X 的网.

证明　必要性. 设 $\{\mathscr{P}_n\}$ 是 X 的 p 构造. 选取 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足: 对 $n \in \mathbb{N}, U \in \mathscr{U}_n$, 存在 $P \in \mathscr{P}_n$, 使 $\mathrm{cl}_{\beta X} U \subset P$. 下面验证 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 p 序列. 对 $x \in X$, 及 X 的开集列 $\{U_n\}$, 使 $x \in U_n \in \mathscr{U}_n$, 令 $D_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n$.

(16.1) 因为 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{cl}_{\beta X}U_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{P}_n) \subset X$, 所以 $D_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X\cap \mathrm{cl}_{\beta X}U_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{cl}_{\beta X}U_n$ 是 X 的紧集.

(16.2) 设 $D_x \subset U \in \tau(X)$. 取 $G \in \tau(\beta X)$, 使 $U = G\cap X$. 那么 $\{G\}\cup\{\beta X - \mathrm{cl}_{\beta X}U_n : n\in\mathbb{N}\}$ 覆盖 βX, 从而存在 $k\in\mathbb{N}$, 使 $\bigcap_{n\leqslant k}\mathrm{cl}_{\beta X}U_n \subset G$, 于是 $\bigcap_{n\leqslant k}\overline{U}_n \subset U$. 故 $\{\bigcap_{n\leqslant k}\overline{U}_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 D_x 在 X 的网.

充分性. 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 p 序列. 对 $n\in\mathbb{N}$, 取 $\mathscr{P}_n\subset\tau(\beta X)$, 使 $\mathscr{P}_{n|X} = \mathscr{U}_n$. 则 $\mathscr{P}_n$ 覆盖 X. 设 $x\in X$. 如果存在 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{P}_n) - X$, 则有 βX 的集列 $\{P_n\}$, 使 $\{x,y\}\subset P_n\in\mathscr{P}_n$, 那么 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{P_n\cap X}$ 是 X 的紧集, 于是存在 $G\in\tau(\beta X)$ 和 $k\in\mathbb{N}$, 使 $\bigcap_{n\leqslant k}\overline{P_n\cap X}\subset G\subset \mathrm{cl}_{\beta X}G\subset \beta X - \{y\}$. 令

$$W = (\bigcap_{n\leqslant k}P_n)\cap(\beta X - \mathrm{cl}_{\beta X}G).$$

那么 $W\cap X = \varnothing$. 然而 $y\in W\in\tau(\beta X)$, 于是 $W\cap X\neq\varnothing$, 矛盾. 从而 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{P}_n)\subset X$. 因此 $\{\mathscr{P}_n\}$ 是 X 的 p 构造.

显然, p 序列性质是可数可积性.

X 称为等紧空间 [42], 若 X 的每一可数紧的闭集是紧集. 次亚紧空间是等紧空间 (见附录 A 定理 4.2).

推论 2.2.17 设 X 是正则的等紧空间. 若 X 是 wΔ 空间, 则 X 存在 p 序列.

证明 对 X 的 wΔ 序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 取 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{V}_n\}$, 使 $\mathscr{V}_n^-$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 由收敛引理, $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 X 的 p 序列.

定理 2.2.18[66, 136] 对正则的次亚紧空间 X, 下述条件等价:

(1) X 具有严格 p 序列;

(2) X 具有 p 序列;

(3) X 是 wΔ 空间.

证明 只须证 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 p 序列, 其中 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 X 的 θ 序列 $\{\mathscr{V}_{nj}\}_{j\in\mathbb{N}}$, 使 $\mathscr{V}_{nj}$ 开加细 $\mathscr{U}_n\wedge(\wedge_{m,i<n}\mathscr{V}_{mi})$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{V}_k = \mathscr{V}_{k1}$. 往证 $\{\mathscr{V}_k\}$ 是 X 的 wΔ 序列. 设 X 的点 x 及序列 $\{x_k\}$ 满足 $x_k\in\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_k)$. 则存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{k_i\},\{j_i\}$, 使 $k_{i+1}>\max\{k_i,j_i\}, 1\leqslant|(\mathscr{V}_{k_ij_i})_x|<\aleph_0$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 因为 $\{x_{k_i}: i>n\}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_{k_{n+1}})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_{k_nj_n})$ 且 $\mathscr{V}_{k_nj_n}$ 加细 $\mathscr{U}_n$, 不妨设存在 $U_n\in\mathscr{U}_n$, 使 $\{x_{k_i}: i>n\}\cup\{x\}\subset U_n$, 于是 $\{x_{k_i}\}$ 有聚点, 从而 $\{x_k\}$ 有聚点.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wΔ 序列. 由引理 1.4.8, 存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{V}_n\}$ 满足: $\mathscr{V}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{V}_n\wedge\mathscr{U}_n$ 且对 $x\in X$ 有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)}\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$. 由收敛引理, $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 X 的严格 p 序列.

推论 2.2.19 对仿紧空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 M 空间;

(2) X 是 wΔ 空间;

(3) X 是 p 空间.

例 2.2.20 p 空间类.

(1) 局部紧性 (因而 p 空间性质) $\not\Rightarrow$ 等紧性, 如序空间 ω_1;

(2) p 空间 $\not\Rightarrow$ 局部紧空间, 如无理数空间 $\mathbb{P}$;

(3) 半圆盘拓扑空间 X[360]:

(i) X 不是正则空间;

(ii) X 是可展空间;

(iii) X 不存在 p 序列 [136].

让 $S=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R},y>0\},L=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ 且 $X=S\cup L$. 记 τ^* 是 X 的欧氏子空间拓扑. X 赋予半圆盘拓扑

$$\tau=\{\tau^*\}\cup\{\{x\}\cup(S\cap U):x\in L,x\in U\in\tau^*\}.$$

称 (X,τ) 为半圆盘拓扑空间. 易验证, X 不是正则空间. 利用 $\mathbb{R}^2$ 的球形邻域, 易验证 X 是可展空间.

若 X 具有 p 序列 $\{\mathscr{U}_n\}$. 对 $x=(0,0)\in X$, 取定 $U_n\in(\mathscr{U}_n)_x$. 再取 x 的邻域 $\{x\}\cup(S\cap \mathrm{B}(x,2r_n))\subset U_n$, 其中 $\mathrm{B}(x,2r_n)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的球形邻域且 $r_{n+1}<r_n$. 设 $x_n=(r_n,0)$, 则 $x_n\in\bigcap_{k\leqslant n}\overline{U}_k$, 从而序列 $\{x_n\}$ 有聚点, 这与 $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的闭离散子集相矛盾. 故 X 不存在 p 序列.

(4) 局部紧, 次可度量空间 $\not\Rightarrow$ β 空间 [140].

设 B 是实直线 $\mathbb{R}$ 的 Bernstein 集 (见例 1.8.5), 那么 $\mathbb{R}$ 的每一不可数闭集均与 $B,\mathbb{R}-B$ 相交. 让 $\{B_\alpha:\alpha<2^\omega\}$ 是 B 的在 $\mathbb{R}$ 中具有不可数闭包的可数集全体之集. 对 $\alpha<2^\omega$, 由超限归纳, 选取 $x_\alpha\in\overline{B}_\alpha-(B\cup\{x_\beta:\beta<\alpha\})$, 并取 $x_{\alpha n}\in B_\alpha$, 使 $x_{\alpha n}\to x_\alpha$. 置 $X=B\cup\{x_\alpha:\alpha<2^\omega\}$. 赋予 X 下述拓扑: B 的点是孤立点; x_α 的邻域基元形如 $\{x_\alpha\}\cup\{x_{\alpha n}:n\geqslant m\},m\in\mathbb{N}$.

显然, X 是局部紧的次可度量空间. 让 $H=\{x_\alpha:\alpha<2^\omega\}$. 则 H 是 X 的闭集. 如果 X 是 β 空间, 由定理 1.7.7, X 是半层空间, 所以存在 X 的开集列 $\{U_n\}$ 满足: $H=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$. 若某一 $B-U_n$ 是不可数的, 则存在 $\alpha<2^\omega$, 使 $B_\alpha\subset B-U_n$, 这与 $x_{\alpha n}\to x_\alpha\in U_n$ 相矛盾, 从而每一 $B-U_n$ 是可数的. 因为 B 是不可数的, 所以 $B\cap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n)\neq\varnothing$, 矛盾.

问题 2.2.21[140] 正规 Moore 空间是否是次可度量空间?

2.3 商 映 象

本节以商映射为核心, 介绍度量空间商映象, 及相关的伪开映象和可数双商映

象的刻画, 它们恰好是序列空间, Fréchet 空间和强 Fréchet 空间. 作为应用, 讨论正规度量空间和连通度量空间商映象的刻画. 该论题依赖于弱第一可数空间的映射性质.

命题 2.3.1 (1) 商映射保持 k 空间 [200], 序列空间 [115];

(2) 伪开映射保持 Fréchet 空间 [20, 115];

(3) 可数双商映射保持强 Fréchet 空间 [350].

证明 定理 2.2.2 已证明了 (3). 设 $f: X \to Y$.

(1) 设 f 是商映射, 其中 X 是 k 空间. 若 Y 的子集 A 满足对 $K \in \mathscr{K}(Y)$, 有 $A \cap K \in \tau^c(Y)$, 如果 $L \in \mathscr{K}(X)$, 则 $A \cap f(L) \in \tau^c(Y)$, 于是 $f^{-1}(A) \cap L = f^{-1}(A \cap f(L)) \cap L \in \tau^c(X)$, 从而 $f^{-1}(A) \in \tau^c(X)$, 因此 $A \in \tau^c(Y)$, 故 Y 是 k 空间.

这证明了一个略强的事实: 对 Y 的子集 A, 若对 $L \in \mathscr{K}(X)$ 有 $A \cap f(L) \in \tau^c(Y)$, 则 $A \in \tau^c(Y)$. 将上述证明中的 $\mathscr{K}(Y), \mathscr{K}(X)$ 分别换为 $\mathscr{S}(Y), \mathscr{S}(X)$ 知, 商映射保持序列空间.

(2) 设 f 是伪开映射, 其中 X 是 Fréchet 空间. 若 $y \in \overline{A} \subset Y$, 如果 $f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)} = \varnothing$, 那么 $y \in f(X - \overline{f^{-1}(A)})^\circ \subset Y - \overline{A}$, 矛盾. 于是存在 $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)}$, 从而存在序列 $\{x_n\} \subset f^{-1}(A)$, 使 $x_n \to x$, 因此序列 $\{f(x_n)\} \subset A$ 且 $f(x_n) \to y$. 故 Y 是 Fréchet 空间.

定义 2.3.2 设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的覆盖, 称 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑 [99], 或称 X 由 $\mathscr{F}$ 所确定 [143], 如果对 $A \subset X, A \in \tau^c(X)$ 当且仅当对 $F \in \mathscr{F}$ 有 $A \cap F \in \tau^c(F)$.

显然, X 是 k 空间 (序列空间) 当且仅当 X 关于 $\mathscr{K}(X)$ ($\mathscr{S}(X)$) 具有弱拓扑.

命题 2.3.3[143] 设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的覆盖, $Z = \bigoplus \mathscr{F}$. 令 $f: Z \to X$ 是自然映射. f 是商映射当且仅当 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑.

证明 设 f 是商映射. 对 $A \subset X$, 若任给 $F \in \mathscr{F}, A \cap F \in \tau^c(F)$, 那么 $f^{-1}(A) \in \tau^c(Z)$, 于是 $A \in \tau^c(X)$, 所以 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑. 如果 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑, 并且有 $A \subset X$, 使 $f^{-1}(A) \in \tau^c(Z)$, 那么对 $F \in \mathscr{F}$ 有 $A \cap F \in \tau^c(F)$, 从而 $A \in \tau^c(X)$, 故 f 是商映射.

定理 2.3.4[118] 下述条件等价:

(1) X 是 k 空间;

(2) X 是仿紧局部紧空间的商映象;

(3) X 是局部紧空间的商映象.

证明 (1) ⇒ (2). 设 X 是 k 空间, 则 X 关于 $\mathscr{K}(X)$ 具有弱拓扑. 由命题 2.3.3, X 是仿紧局部紧空间 $\bigoplus \mathscr{K}(X)$ 的商映象.

(2) ⇒ (3) 是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (1). 只须证局部紧空间是 k 空间. 设 Y 是局部紧空间, 对 $A \subset Y$, 若 $A \notin \tau^c(Y)$, 存在 $y \in \overline{A} - A$. 设 V 是 y 的开邻域且 $\overline{V} \in \mathscr{K}(Y)$, 那么 $y \in \overline{\overline{V} \cap A} - \overline{V} \cap A$, 于是 $\overline{V} \cap A \notin \tau^c(Y)$. 故 Y 是 k 空间.

推论 2.3.5　设 X 是 k 空间. 若 X 具有点 G_δ 性质, 则 X 是序列空间.

证明　X 是仿紧局部紧空间 $\bigoplus \mathscr{K}(X)$ 的商映象. 由定理 1.7.7, $\bigoplus \mathscr{K}(X)$ 是第一可数空间. 再由命题 2.3.1, X 是序列空间.

将定理 2.3.4 证明中的 $\mathscr{K}(X)$ 换为 $\mathscr{S}(X)$, 得出度量空间商映象的刻画.

定理 2.3.6[115]　下述条件等价:

(1) X 是序列空间;

(2) X 是局部紧度量空间的商映象;

(3) X 是度量空间的商映象.

利用映射引理, 得出度量空间伪开映象以及可数双商映象的刻画.

定理 2.3.7[20, 115]　下述条件等价:

(1) X 是 Fréchet 空间;

(2) X 是局部紧度量空间的伪开映象;

(3) X 是度量空间的伪开映象.

定理 2.3.8[350]　下述条件等价:

(1) X 是强 Fréchet 空间;

(2) X 是局部紧度量空间的可数双商映象;

(3) X 是度量空间的可数双商映象.

本节第二部分, 讨论两类特殊空间的商映象问题. 先介绍一类特殊的度量空间, 它的闭映象或商映象都是可度量空间.

定义 2.3.9[308]　度量空间 (X, d) 称为正规度量空间, 若 X^d 是 X 的紧集.

Mrówka[308] 定义的正规度量空间: 存在 X 的度量 d, 使对 X 中不相交的闭集 A, B, 有 $d(A, B) > 0$. Mrówka 证明了这定义与 2.3.9 等价. 本书没用到这一事实.

定理 2.3.10[10, 182]　设 X 是度量空间. 下述条件等价:

(1) X 是正规度量空间;

(2) X 的每一闭映象是度量空间;

(3) X 的每一商映象是度量空间.

证明　(1) $\Rightarrow$ (3). 设 $f: X \to Y$ 是商映射. 记紧度量空间 X^d 的可数稠集为 $D = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$. 定义

$$\mathscr{B} = \{\mathrm{B}(a_i, 1/j) : i, j \in \mathbb{N}\}, \ \mathscr{U} = \mathscr{B}^F.$$

则 $\mathscr{U}$ 是 X 的可数族. 对 $U \in \tau(X)$, 置

$$H(U) = (Y - f(X^d - U)) \cap f(U),$$

$$G_1(U) = (X - f^{-1}f(X^d - U)) \cap (f^{-1}f(U) - U),$$
$$G_2(U) = (X - f^{-1}f(X^d - U)) \cap U.$$

则 $f^{-1}(H(U)) = G_1(U) \cup G_2(U)$. 由于 $G_1(U) \subset X - X^d$, $G_2(U) \in \tau(X)$, 于是 $H(U) \in \tau(Y)$. 令

$$\mathscr{W} = \{H(U) : U \in \mathscr{U}\} \cup \{\{y\} : y \in Y - f(X^d)\}.$$

下面证明 $\mathscr{W}$ 是仿紧空间 Y 的 σ 局部有限基, 故 Y 是度量空间.

(10.1) Y 是仿紧空间.

对 Y 的开覆盖 $\mathscr{V}$, 存在 $\mathscr{V}' \in \mathscr{V}^{<\omega}$, 使 $f(X^d) \subset \cup\mathscr{V}'$, 那么 $\mathscr{V}' \cup \{\{y\} : y \in Y - \cup\mathscr{V}'\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的局部有限开加细, 所以 Y 是仿紧空间.

(10.2) $\mathscr{W}$ 是 Y 的基.

对 $y \in Y$, 若 $y \in V \in \tau(Y)$, 不妨设存在 $x \in X^d$, 使 $y = f(x)$, 则存在 $U \in \mathscr{U}$, 使 $X^d \cap f^{-1}f(x) \subset U \subset f^{-1}(V)$, 从而 $y \in H(U) \subset V$.

(10.3) $\mathscr{W}$ 是 σ 局部有限基.

由 $\mathscr{U}$ 的可数性, 记 $\{H(U) : U \in \mathscr{U}\}$ 的覆盖 $f(X^d)$ 的有限子族全体为 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对 $i \in \mathbb{N}$, 让

$$\mathscr{W}_i = \mathscr{P}_i \cup \{\{y\} : y \in Y - \cup\mathscr{P}_i\}.$$

则 $\mathscr{W} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_i$ 且 $\mathscr{W}_i$ 是局部有限的.

(3) ⇒ (2) 是显然的, 下面证明 (2) ⇒ (1). 若 $X^d \notin \mathscr{K}(X)$, 则 X^d 含可数闭离散子空间 Z. 让 $f : X \to X/Z$ 是商映射, 则 f 是闭映射且 $\partial f^{-1}([Z]) = Z$ 不是 X 的紧集. 由定理 2.2.2, X/Z 不是度量空间, 矛盾. 故 $X^d \in \mathscr{K}(X)$.

推论 2.3.11[395] X 是紧度量空间当且仅当 X 的每一映象是度量空间.

证明 只须证充分性. 由定理 2.3.10, X 是正规度量空间. 若 X 不是紧空间, 则 X 含可数闭离散子空间 $Z \subset X - X^d$. 记 $Y = X - Z$, 让 $\tau_1 = \tau(X)_{|Y}$, 取 τ_2 是集合 Z 上不可度量的 Hausdorff 拓扑. 由于 $(Z, \tau_{1|Z})$ 是 X 的开闭子空间, 所以 $\mathrm{id}_X : X \to (Y, \tau_1) \oplus (Z, \tau_2)$ 是连续函数, 但 $(Y, \tau_1) \oplus (Z, \tau_2)$ 不是度量空间, 矛盾. 故 X 是紧度量空间.

推论 2.3.12[182] 设 X 是度量空间. 下述条件等价:

(1) X 的每一商映象是度量空间;

(2) X 的每一商映象是第一可数空间;

(3) X 的每一商映象是 Fréchet 空间;

(4) X 的每一商映射是可数双商映射;

(5) X 的每一商映射是伪开映射.

证明 (1) ⇒ (2) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (3) 是显然的, 所以只须证 (3) ⇒ (1). 如果 $X^d \notin \mathscr{K}(X)$, 那么 X^d 含可数闭离散子空间 $\{x_n : n \in \omega\}$. 取 X 的离散开集

族 $\{U_n : n \in \omega\}$, 使 $x_n \in U_n$. 对 $n \in \omega$, 取序列 $\{x_{nm}\}_m \subset U_n$, 使 $x_{nm} \to x_n$. 令 $Y = X - \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 定义函数 $f : X \to Y$, 满足

$$f(x) = \begin{cases} x_{0n}, & x = x_n, n \in \mathbb{N}, \\ x, & x \in Y. \end{cases}$$

赋予 Y 由 f 诱导的商拓扑. 则 Hausdorff 空间 Y 含 Arens 子空间 S_2, 而 S_2 不是 Fréchet 空间, 矛盾. 因此 $X^d \in \mathscr{K}(X)$, 故 X 的每一商映象是度量空间.

例 2.3.13[236] 存在正规度量空间 X 以及商映射 $f : X \to Y$, 使 f 既不是闭映射也不是开映射.

让 $X = \mathbb{I} \times \omega$, 设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{I}$ 关于欧氏拓扑的可数基. 置

$$V(B, m) = B \times (\{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant m\}), B \in \mathscr{B}, m \in \mathbb{N};$$

$$\mathscr{P} = \{\{x\} : x \in \mathbb{I} \times \mathbb{N}\} \cup \{V(B, m) : B \in \mathscr{B}, m \in \mathbb{N}\}.$$

X 赋予由基 $\mathscr{P}$ 生成的拓扑. 则 X 是正则空间且 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 离散基, 于是 X 是可度量空间. 因为 X^d 是 $\mathbb{I}$ 赋予欧氏拓扑, 所以 X^d 是 X 的紧集, 因而 X 是正规度量空间. 让 $f : X \to \mathbb{I}$ 是投影映射. 那么商映射 f 既不是闭映射也不是开映射.

例 2.3.13 说明, 推论 2.3.12 的伪开映射或可数双商映射不可加强为闭映射或开映射. 例 2.3.14 说明, 定理 2.3.10 的闭映射或商映射不可换为可数双商映射.

例 2.3.14[236] 存在每一可数双商映象是度量空间的非正规度量空间.

对 $n \in \mathbb{N}$, 令 $I_n = \mathbb{I}$. 取 $X = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$. 那么度量空间 X 不是正规度量空间. 设 $f : X \to Y$ 是可数双商映射, 则 Y 是 Lindelöf 的局部紧, 局部可度量空间, 于是 Y 是度量空间.

另一类特殊空间是连通的序列空间. 映射保持连通性. 连通空间是否是连通度量空间的映象 [386]?

定义 2.3.15[102] X 称为 s 连通空间, 若 X 不能表示为两个不相交的非空序列开集之并. s 连通空间也称为序列连通空间.

显然, 连通的序列空间 $\Rightarrow$ s 连通空间 $\Rightarrow$ 连通空间.

定理 2.3.16[241] 下述条件等价:

(1) X 是连通度量空间的序列覆盖映象;

(2) X 是连通度量空间的映象;

(3) X 是 s 连通空间.

证明 (2) $\Rightarrow$ (3). 只须证明: 设映射 $f : M \to X$, 若 M 是 s 连通的, 则 X 是 s 连通的. 若不然, 则 X 是不相交的非空序列开集 A, B 之并. 如果 X 的序列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \in f^{-1}(A)$, 则 $f(a_n) \to f(a) \in A$, 于是 $\{f(a_n)\}$ 是终于 A 的, 从而 $\{a_n\}$

是终于 $f^{-1}(A)$ 的, 所以 $f^{-1}(A)$ 是 M 的序列开集. 同理, $f^{-1}(B)$ 是 M 的序列开集. 即, M 是两个不相交的非空序列开集之并, 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 是 s 连通空间. 让 $M = \bigoplus \mathscr{S}(X)$, 记 (M,d) 为拓扑和导出的度量空间, 设 $q:(M,d)\to X$ 是自然映射. 则 q 是连续的.

定义 $\rho:(M\times\mathbb{I})^2\to\mathbb{R}^+$ 如下:

$$\rho((y_1,t_1),(y_2,t_2))=\begin{cases} d(y_1,y_2)+t_1+t_2, & y_1\neq y_2,\\ |t_2-t_1|, & y_1=y_2.\end{cases}$$

易验证, ρ 是 $M\times\mathbb{I}$ 的距离, 并且 M 同胚于 $(M\times\mathbb{I},\rho)$ 的子空间 $M\times\{0\}$.

定义 $M\times\mathbb{I}$ 的二元关系 "$\sim$": $(y_1,t_1)\sim(y_2,t_2)$ 当且仅当 $q(y_1)=q(y_2)$ 且 $t_1=t_2=1$, 或 $y_1=y_2$ 且 $t_1=t_2$. 则 $\sim$ 是等价关系. 等价类的集合记为 Z, 并且让 $p:M\times\mathbb{I}\to Z$ 是自然投射. 对 $y\in M, n\in\mathbb{N}$, 令

$$B_{yn}=p(\{(y,1)\}\cup\{(y',t):q(y')=q(y),1-1/n<t<1\}).$$

Z 赋予下述拓扑 τ: 对 $(y,t)\in M\times\mathbb{I}$, 若 $t\neq 1$, $p(y,t)$ 在 Z 的邻域形如 (y,t) 在 $M\times\mathbb{I}$ 的邻域; 若 $t=1$, $p(y,t)$ 在 Z 的邻域基元形如 $B_{yn}, n\in\mathbb{N}$. 则 (Z,τ) 是正则空间, 并且对 $U\in\tau$, $p^{-1}(U)$ 是 $(M\times\mathbb{I},\rho)$ 的开集. 从而 p 是连续的.

(16.1) (Z,τ) 是可度量空间.

设 $\mathscr{B}$ 是度量空间 $(M\times\mathbb{I},\rho)$ 的 σ 局部有限基. 让 $\mathbb{Q}'$ 是 $\mathbb{I}$ 的子集 $(1/3,1)$ 中的有理数全体之集. 置

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}_1=\{p(B):B\in\mathscr{B},B\subset M\times[0,1/2)\},\\&\mathscr{P}_2=\{p(\{y\}\times(r_1,r_2)):y\in M,r_1,r_2\in\mathbb{Q}'\},\\&\mathscr{P}_3=\{B_{yn}:y\in M,n\in\mathbb{N}\},\\&\mathscr{P}=\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2\cup\mathscr{P}_3.\end{aligned}$$

则 $\mathscr{P}$ 是 (Z,τ) 的 σ 局部有限基, 所以 (Z,τ) 是可度量空间.

定义函数 $h:(M\times\mathbb{I},\rho)\to X$ 和 $f:(Z,\tau)\to X$, 使 $h(y,t)=q(y)$ 且 $f\circ p=h$.

(16.2) f 是序列覆盖映射.

注意到, 如果 E 是 (M,d) 的开集, 则 $p(E\times[0,1))\in\tau$; 如果 $x\in X$, 则 $p(q^{-1}(x)\times(0,1])\in\tau$. 若 A 是 X 的开集, 则 $q^{-1}(A)$ 是 (M,d) 的开集, 于是 $f^{-1}(A)=p(q^{-1}(A)\times[0,1))\cup(\bigcup_{x\in A}p(q^{-1}(x)\times(0,1]))\in\tau$. 故 f 是连续的. 设 X 中非平凡的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 由 q 的构造, 存在 (M,d) 中收敛于 y 的序列 $\{y_n\}$, 使 $q(y)=x$ 且 $q(y_n)=x_n$. 因为 $\rho((y_n,0),(y,0))=d(y_n,y)$, 所以 $(y_n,0)\to(y,0)$. 又由于 p 是连续的, 那么 $p(y_n,0)\to p(y,0)$. 再由于 $fp(y_n,0)=x_n$, 于是 f 是序列覆盖映射.

(16.3) (Z,τ) 是 s 连通空间.

若不然, Z 是两不相交的非空序列开集 C, D 之并. 显然, $f^{-1}(x)$ 是 Z 的 s 连通子集, 所以或者 $f^{-1}(x) \subset C$, 或者 $f^{-1}(x) \subset D$, 于是存在 X 的子集 A, B, 使 $X = A \cup B, C = \bigcup_{x \in A} f^{-1}(x)$ 且 $D = \bigcup_{x \in B} f^{-1}(x)$, 即 $C = f^{-1}(A), D = f^{-1}(B)$. 设 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in A$. 由 (16.2), 存在 Z 中收敛于某点 $z \in f^{-1}(x)$ 的序列 $\{z_n\}$, 使 $f(z_n) = x_n$. 则 $z \in C$, 于是 $\{z_n\}$ 是终于 C 的, 从而 $\{x_n\}$ 是终于 A 的, 故 A 是 X 的序列开集. 同理, B 也是 X 的序列开集. 这与 X 的 s 连通性相矛盾. 因此, Z 是 s 连通空间.

由映射引理, 有下述推论.

推论 2.3.17[102, 241]　X 是连通度量空间的商映象 (伪开映象) 当且仅当 X 是连通的序列空间 (Fréchet 空间).

例 2.3.18[241]　连通性 $\not\Rightarrow s$ 连通性.

对 $\mathbb{R}$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{R}$, 先证明: 对 $p \in \beta\mathbb{R} - \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 中不存在序列收敛于 p. 事实上, 若存在 $\mathbb{R}$ 中非平凡的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 p, 令 $A = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}, B = \{x_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$, 则 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中不相交的闭集. 由于 $\mathbb{R}$ 是正规的, 所以 $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(B) = \varnothing$ (如见 Engelking[101]的推论 3.6.4), 而 $p \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(B)$, 矛盾.

由于 $\mathbb{R}$ 是连通的, 所以 $\beta\mathbb{R}$ 也是连通的. 另一方面, $\mathbb{R}$ 在 $\beta\mathbb{R}$ 中既是序列开集又是序列闭集, 所以 $\beta\mathbb{R}$ 不是 s 连通空间.

由定理 2.3.16, 连通空间 $\beta\mathbb{R}$ 不是连通度量空间的映象.

本节最后一个命题, 用乘积给出 Fréchet 空间与强 Fréchet 空间的关系.

命题 2.3.19[285]　X 是强 Fréchet 空间当且仅当 $X \times \mathbb{S}_1$ 是 Fréchet 空间.

证明　设 X 是强 Fréchet 空间. 对 $A \subset X \times \mathbb{S}_1$, 若 $p \in \overline{A}$, 不妨设 $p = (x, 0)$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$A_n = A \cap (X \times (\mathbb{S}_1 - \{1/m : m < n\})),$$

$$B_n = \pi_1(A_n).$$

则 $\{B_n\}$ 是 X 的递减集列且 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n$, 于是存在 $x_n \in B_n$, 使 $x_n \to x$, 从而存在序列 $\{z_n\} \subset A$, 使 $z_n \to p$. 故 $X \times \mathbb{S}_1$ 是 Fréchet 空间.

反之, 设 $X \times \mathbb{S}_1$ 是 Fréchet 空间. 对 X 的递减集列 $\{A_n\}$, 若 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A}_n$, 令 $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times \{1/n\})$. 那么 $(x, 0) \in \overline{A} \subset X \times \mathbb{S}_1$, 于是存在序列 $\{z_i\} \subset A$, 使 $z_i \to (x, 0)$, 从而有 $\mathbb{N}$ 的子集 $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ 及 $x_i \in A_{n_i}$, 使 $z_i = (x_i, 1/n_i)$ 且 $x_i \to x, n_i \to \infty$. 因此存在 $y_n \in A_n$, 使 $y_n \to x$. 故 X 是强 Fréchet 空间.

2.4 开 映 象

本节介绍度量空间和仿紧 M 空间开映象的刻画. 1960 年 Ponomarev[333] 证明了 X 是第一可数空间当且仅当它是可度量空间的开映象. Ponomarev 定理是提出 Alexandroff 问题的原动力 [28], 而且 Ponomarev 创造的将特定的非度量空间表为 Baire 零维空间的子空间的映象的方法, 简称为 Ponomarev 方法, 是对度量空间映象理论的卓越贡献. 从本节起的本章各节, 将系统地介绍这种方法.

定义 2.4.1[289] 空间 X 的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的子集 A 的外基, 若对 $x \in A$ 及 $x \in U \in \tau(X)$, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B \subset U$.

引理 2.4.2 (König 引理) 设 $\{X_i\}$ 是非空的有限集列. 若对 $n < m$, 存在对应 $\pi_n^m : X_m \to X_n$ 满足: $\pi_n^m = \pi_n^k \circ \pi_k^m$ 且 $\pi_m^m = \mathrm{id}_{X_m}$, 则存在 $(x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$, 使 $\pi_n^m(x_m) = x_n$.

证明 X_i 赋予离散拓扑, 则 X_i 是紧空间. 置

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i,$$
$$Y = \{(x_i) \in X : \pi_n^m(x_m) = x_n, n < m\},$$

则 Y 是紧空间 X 的闭集. 事实上, 若 $y = (y_i) \in X - Y$, 则存在 $n < m$, 使 $\pi_n^m(y_m) \neq y_n$, 令 $V = \{(x_i) \in X : x_m = y_m, x_n = y_n\}$, 那么 $y \in V \in \tau(X)$ 且 $V \cap Y = \varnothing$, 故 Y 是 X 的闭集. 为完成引理的证明, 只须说明 $Y \neq \varnothing$. 对 $m \in \mathbb{N}$, 令

$$Y_m = \{(x_i) \in X : \text{若 } n < m, \text{ 则 } \pi_n^m(x_m) = x_n\},$$

于是 Y_m 是 X 的非空闭集. 从而 $\{Y_m\}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集列, 所以 $Y = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Y_m \neq \varnothing$.

引理 2.4.3[289] 设 $K \in \mathscr{K}(X)$. 若 K 在 X 中具有可数外基 $\mathscr{U}$, 那么存在满足下述条件的 $\mathscr{U}$ 的有限集列 $\{\mathscr{U}_i\}$:

(1) 对 $i \in \mathbb{N}, K \subset \cup \mathscr{U}_i$;

(2) 对 $x \in K$, 若 $x \in U_i \in \mathscr{U}_i$, 则 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是 x 的邻域基;

(3) 对 $x \in K, i \in \mathbb{N}$, 存在 $U_i \in \mathscr{U}_i$, 使 $x \in \overline{U_{i+1} \cap K} \subset U_i$.

证明 设 $\{\mathscr{V}_i\}$ 为所有覆盖 K 的 $\mathscr{U}$ 的有限集族. 由归纳法, 取 $\{\mathscr{V}_i\}$ 的子列 $\{\mathscr{U}_i\}$ 满足: 对 $i \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}_i$ 部分加细 $\mathscr{V}_i$ 且 $\{\overline{U \cap K} : U \in \mathscr{U}_{i+1}\}$ 部分加细 $\mathscr{U}_i$. 下面验证 $\{\mathscr{U}_i\}$ 符合条件 (1) 至 (3). (1) 显然成立. 对 $x \in K$ 及 $x \in U_i \in \mathscr{U}_i$, 设 $x \in W \in \tau$. 取 $V \in \mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V} \in \mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $x \in V \subset W$ 且 $K - V \subset \cup \mathscr{V} \subset X - \{x\}$. 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{V} \cup \{V\} = \mathscr{V}_m$, 从而 $U_m \subset V$. 故 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是 x 的邻域基. 为了验证 (3), 对 $x \in K, i \in \mathbb{N}$, 定义 $\mathscr{W}_i = (\mathscr{U}_i)_x$. 则 $\mathscr{W}_i$ 是有限的, 并且满足: 若

$U_{i+1} \in \mathscr{W}_{i+1}$, 则存在 $U_i \in \mathscr{W}_i$, 使 $\overline{U_{i+1} \cap K} \subset U_i$. 由 König 引理, 对 $i \in \mathbb{N}$, 存在 $U_i \in \mathscr{U}_i$, 使 $x \in \overline{U_{i+1} \cap K} \subset U_i$.

命题 2.4.4[289]　设 X 是第一可数空间. 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的基, 那么存在可度量空间 M 和开映射 $f: M \to X$, 满足

(1) 若 $K \in \mathscr{K}(X)$ 具有可数外基 $\mathscr{U}_K \subset \mathscr{U}$, 则存在 $L \in \mathscr{K}(M)$, 使 $f(L) = K$;

(2) 对 $E \subset X$, 若 $(\mathscr{U})_E$ 可数, 则 $f^{-1}(E)$ 具有可数基.

证明　记 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. 对 $i \in \mathbb{N}$, Λ_i 是集合 Λ 赋予离散拓扑的空间. 定义

$$M = \{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i : \{U_{\alpha_i}\} \text{ 是 } X \text{ 中某点 } x(\beta) \text{ 的邻域基 }\},$$

则 M 是可度量空间. 对 $\beta \in M, x(\beta)$ 是唯一确定的. 于是可以定义函数 $f: M \to X$ 为 $f(\beta) = x(\beta)$.

(4.1) f 是映射. 由 X 的第一可数性, f 是满函数. 设 $\beta = (\alpha_i) \in M, f(\beta) = x \in U \in \tau(X)$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $x \in U_{\alpha_m} \subset U$. 令 $V = \{\gamma \in M : \pi_m(\gamma) = \alpha_m\}$. 则 $\beta \in V \in \tau(M)$ 且 $f(V) \subset U_{\alpha_m} \subset U$. 故 f 是连续的.

(4.2) f 是开映射. 对 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha_i \in \Lambda_i (\forall i \leqslant n)$, 置

$$B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \{\beta \in M : \pi_i(\beta) = \alpha_i, i \leqslant n\}.$$

如果 $\beta = (\beta_i) \in B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 那么

$$f(\beta) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_{\beta_i} \subset \bigcap_{i\leqslant n} U_{\alpha_i},$$

所以 $f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \subset \bigcap_{i\leqslant n} U_{\alpha_i}$. 若 $x \in \bigcap_{i\leqslant n} U_{\alpha_i}$, 对 $i > n$, 取 $\alpha_i \in \Lambda_i$, 使 $\{U_{\alpha_i}\}_{i>n}$ 是 x 的邻域基. 让 $\beta = (\alpha_i)$. 那么 $\beta \in B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 且 $f(\beta) = x$, 于是 $\bigcap_{i\leqslant n} U_{\alpha_i} \subset f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$. 因此 $f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = \bigcap_{i\leqslant n} U_{\alpha_i}$. 由于

$$\{B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) : \alpha_i \in \Lambda_i, i \leqslant n\}$$

是 M 的基, 所以 f 是开映射.

由 f 的定义, (2) 成立. 下证 (1) 成立.

(4.3) 若 $K \in \mathscr{K}(X)$ 具有可数外基 $\mathscr{U}_K \subset \mathscr{U}$, 则存在满足引理 2.4.3 全部条件的 $\mathscr{U}_K$ 的有限集列 $\{\mathscr{U}_i\}$. 对 $i \in \mathbb{N}$ 有 $\Gamma_i \in \Lambda_i^{<\omega}$, 使 $\mathscr{U}_i = \{U_{\alpha_i} : \alpha_i \in \Gamma_i\}$. 不妨设 $U_{\alpha_i} \cap K \neq \varnothing$. 令

$$L = \{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i : \text{ 对 } i \in \mathbb{N} \text{ 有 } \overline{U_{\alpha_{i+1}} \cap K} \subset U_{\alpha_i}\},$$

则 L 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ 的闭集. 事实上, 如果 $(\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i - L$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\overline{U_{\alpha_{m+1}} \cap K} \not\subset U_{\alpha_m}$. 令 $W = \{(\beta_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i : \beta_m = \alpha_m\}$. 则 $(\alpha_i) \in W \in \tau(\prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i)$ 且 $W \cap L = \varnothing$. 于是 L 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ 的紧集. 对 $\beta = (\alpha_i) \in L$, 因为 $K \cap (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_{\alpha_i}) \neq \varnothing$, 取 $x \in K \cap (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_{\alpha_i})$. 那么 $\beta \in M$ 且 $f(\beta) = x$, 从而 $L \subset M$ 且 $f(L) \subset K$. 再由引理 2.4.3(3), $K \subset f(L)$. 故 $L \in \mathscr{K}(M)$ 且 $f(L) = K$.

定理 2.4.5[333] (Ponomarev 定理) X 是第一可数空间当且仅当 X 是可度量空间的开映象.

必要性来自命题 2.4.4. 由开映射保持第一可数性得充分性.

问题 2.4.6[386] 第一可数的连通空间是否是连通度量空间的开映象?

本节第二部分, 介绍仿紧 M 空间的开映象.

命题 2.4.7[284, 394] 设 $\mathscr{K}, \mathscr{P}$ 是空间 Y 的覆盖, 其中 $\mathscr{K}$ 的元是 Y 的闭可数紧集, $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭. 若对 $y \in P \in \mathscr{P}$, 存在 $K \in \mathscr{K}$, 满足

(i) $y \in K \subset P$,

(ii) $\mathscr{P}$ 的某可数集是 K 在 Y 中的网,

则存在可度量空间 M, M 的 σ 离散基 $\mathscr{B}$ 和 $Y \times M$ 的子空间 X, 满足下述条件, 其中记 $f = \pi_{1|X}$, $g = \pi_{2|X}$.

(1) $\mathscr{P} = fg^{-1}(\mathscr{B})$;

(2) 若 $\beta \in M$, 则 $fg^{-1}(\beta) \in \mathscr{K}$;

(3) g 是闭映射;

(4) 对 $E \subset Y, |\{B \in \mathscr{B} : B \cap gf^{-1}(E) \neq \varnothing\}| \leqslant \aleph_0 \cdot |(\mathscr{P})_E|$.

证明 记 $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. 对 $i \in \mathbb{N}$, Λ_i 是集合 Λ 赋予离散拓扑. 定义

$$M = \{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i : \{P_{\alpha_i}\} \text{ 是 } \mathscr{K} \text{ 中某元 } K_\beta \text{ 在 } Y \text{ 中递减的网 }\},$$

则 M 是可度量空间. 对 $\beta \in M, K_\beta$ 是唯一确定的. 令

$$X = \{(y, \beta) \in Y \times M : y \in K_\beta\}.$$

对 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha_i \in \Lambda_i (\forall i \leqslant n)$, 置

$$B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \{\beta \in M : \pi_i(\beta) = \alpha_i, i \leqslant n\},$$

$$\mathscr{B} = \{B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) : \alpha_i \in \Lambda_i, i \leqslant n \in \mathbb{N}\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是 M 的 σ 离散基.

(1) $fg^{-1}(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = P_{\alpha_n}$.

显然, $fg^{-1}(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \subset P_{\alpha_n}$. 若 $y \in P_{\alpha_n}$, 存在 $K \in \mathscr{K}$, 使 $y \in K \subset P_{\alpha_n}$, 并且 K 在 Y 中具有可数网 $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$. 不妨记 $\mathscr{F} = \{P_{\alpha_i}\}_{i > n}$, 其中 $\alpha_i \in \Lambda_i, P_{\alpha_n} \supset P_{\alpha_i} \supset P_{\alpha_{i+1}}$. 令 $\beta = (\alpha_i)$, 那么 $\beta \in B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 且 $y \in K = fg^{-1}(\beta)$, 从而 $P_{\alpha_n} \subset fg^{-1}(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$. 因此 $fg^{-1}(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = P_{\alpha_n}$.

(2) 由定义, 对 $\beta \in M$, $fg^{-1}(\beta) = K_\beta \in \mathscr{K}$.

(3) 对 X 的闭集 C, 设 $\beta = (\alpha_i) \in \overline{g(C)}$. 那么对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $(y_n, \beta^{(n)}) \in (Y \times B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \cap C$, 这时 $y_n \in P_{\alpha_n}$. 所以 $\{y_n\}$ 有聚点, 设为 y_0, 而 $\{\beta^{(n)}\}$ 在 M 中收敛于 β, 因此 $(y_0, \beta) \in C$, 故 $\beta \in g(C)$. 从而 g 是闭映射.

(4) 由 (1), 对 $E \subset Y$, $|\{B \in \mathscr{B} : B \cap gf^{-1}(E) \neq \varnothing\}| \leqslant \aleph_0 \cdot |(\mathscr{P}_E)|$.

命题 2.4.7 的几个推论. 由 (1), f 是满函数, 并且如果 $\mathscr{P}$ 是 Y 的开覆盖, 则 f 是开映射. 由 (2), g 是满函数. 由 (3), g 是逆可数紧映射, 于是 X 是 M 空间.

定义 2.4.8[22] X 称为点可数型空间 (或具有点可数型), 若对 $x \in X$, 存在 X 中含 x 的紧集 K, 使 K 在 X 中具有可数邻域基.

显然, 第一可数空间 $\Rightarrow$ 具有点可数型 $\Rightarrow$ q 空间.

命题 2.4.9[22] 具有 p 序列的正则空间是点可数型空间.

证明 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是正则空间 X 的 p 序列. 对 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, 取定 $U_n \in (\mathscr{U}_n)_x$. 由正则性, 存在 X 的开集列 $\{V_n\}$, 满足 $x \in V_{n+1} \subset \overline{V}_{n+1} \subset V_n \subset U_n$. 令 $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. 由收敛引理, $x \in K \in \mathscr{K}(X)$ 且 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的可数邻域基. 故 X 是点可数型空间.

命题 2.4.10[22] 点可数型空间是 k 空间.

证明 设 X 是点可数型空间. 若存在 X 的非闭集 A, 使对 $K \in \mathscr{K}(X)$, $K \cap A \in \tau^c$, 取定 $x \in \overline{A} - A$. 则存在 X 中含 x 的紧集 C, 使 C 在 X 中有递减的邻域基 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. 取 x 的开邻域 V, 使 $\overline{V} \cap C \cap A = \varnothing$. 令 $B = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, 其中 $x_i \in A \cap V \cap U_i$. 则 $B \cup C \in \mathscr{K}(X)$, 从而 $B = A \cap (\overline{V} \cap (B \cup C)) \in \mathscr{K}(X)$. 因为 $C \cap B = \varnothing$, 存在 $i \in \mathbb{N}$, 使 $U_i \cap B = \varnothing$, 矛盾. 故 X 是 k 空间.

引理 2.4.11[394] 设 X 具有点可数型. 若 $x \in U \in \tau$, 则存在 $K \in \mathscr{K}(X)$, 使 $x \in K \subset U$ 且 K 在 X 中具有可数邻域基.

证明 取 $L \in \mathscr{K}(X)$, 满足 $x \in L$ 且 L 在 X 中具有递减的邻域基 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. 由归纳法证明: 存在 X 中递减的开集列 $\{V_i\}$, 使 $x \in V_i \subset U_i \cap U$ 且 $\overline{V}_{i+1} \cap L \subset V_i \cap L$. 只须注意到, 若已取定了 V_n, 由 L 的紧性, 存在 $V_{n+1} \in \tau$, 使 $x \in V_{n+1} \subset V_n \cap U_{n+1}$ 且 $\overline{V}_{n+1} \cap L - V_n = \varnothing$. 现在, 定义 $K = L \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i)$. 则 $K \in \mathscr{K}(X)$ 且 $x \in K \subset U$. 设 $K \subset W \in \tau$. 那么 $L \subset W \cup (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X - \overline{V}_i))$, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $L \subset W \cup (X - \overline{V}_m)$, 从而有 $k \geqslant m$, 使 $U_k \subset W \cup (X - \overline{V}_m)$, 因此 $V_k \subset U_k \cap \overline{V}_m \subset W$. 故 $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的邻域基.

定理 2.4.12[394] X 具有点可数型当且仅当 X 是仿紧 M 空间的开映象.

证明 由命题 2.4.7 和引理 2.4.11 得必要性. 为证明充分性只须证, 仿紧 M 空间是点可数型空间以及开映射保持点可数型性质.

设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是仿紧空间 X 的 M 序列. 对 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, $\overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1})} \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$. 由收敛引理, $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是含 x 的紧集 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 在 X 中的邻域基. 故 X 具有点可数型.

设 $f : X \to Y$ 是开映射, 其中 X 具有点可数型. 对 $y \in Y$, 取 $x \in f^{-1}(y)$. 那么存在含 x 的紧集 K, 使 K 在 X 中具有递减的邻域基 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, 于是 $\{f(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是含 y 的紧集 $f(K)$ 在 Y 中的邻域基. 故 Y 具有点可数型.

点可数型性质, q 空间性质, 强 Fréchet 性质, Fréchet 性质, 序列空间性质, k 空间性质, g 第一可数性质等都是比第一可数性质弱的拓扑性质, 统称为弱第一可数性质.

例 2.4.13　逆紧映射不保持下述性质: 第一可数空间, 点可数型, q 空间, g 第一可数空间. 因而逆紧映射不保持度量空间或仿紧 M 空间的开映象.

让 X 是蝶形空间 (例 1.8.3), 则 X 是第一可数空间. 令 $K = \mathbb{I} \times \{0\}$, 则 K 是 X 的紧集. 让 $f : X \to X/K$ 是自然投射, 则 f 是逆紧映射, 并且 X/K 不是第一可数空间. 由于 X/K 是具有点 G_δ 性质的正则 Fréchet 空间, 所以 X/K 既不是 q 空间 (定理 1.7.7), 也不是 g 第一可数空间 (推论 1.6.18).

例 2.4.14　弱第一可数空间.

(1) g 第一可数性 $\not\Rightarrow$ Fréchet 性质, q 空间性质, 如 Arens 空间 S_2 (例 1.8.6).

(2) 紧性 (因而点可数型性) $\not\Rightarrow$ 序列空间性质, 如紧化 $\beta\mathbb{N}$.

(3) Fréchet 性质 $\not\Rightarrow$ 强 Fréchet 性质, 如序列扇 S_ω (例 1.8.7).

(4) q 空间性质 $\not\Rightarrow$ k 空间性质. 让 X 是 Frolík 空间 [116], 即 $\mathbb{N} \subset X \subset \beta\mathbb{N}$, 且 X 是 $\beta\mathbb{N}$ 的基数不超过 $\mathbf{c}$ 的可数紧子空间. 则 X 的所有紧集是有限集, 于是 X 不是 k 空间.

(5) 仿紧, 第一可数性 $\not\Rightarrow$ p 空间性质, 如蝶形空间.

例 2.4.15　V 空间 (例 1.8.1): 度量空间的有限到一开映象.

以 X 表示 V 空间. 对 $r \in \mathbb{R}$, 让 $X_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x - r|\}$. 则 X_r 是 X 的可度量的开闭子空间, 且 $\{X_r : r \in \mathbb{R}\}$ 是 X 的点有限开覆盖. 令 $M = \bigoplus_{r\in\mathbb{R}} X_r$, $f : M \to X$ 是自然映射. 则 M 是度量空间且 f 是有限到一的开映射. 下面证明 f 是紧覆盖映射. 对 X 的紧集 K, 令 $K_0 = K \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, $K_1 = K - \cup\{X_r : r \in \pi_1(K_0)\}$. 由于 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 是 X 的闭离散子空间, 所以 K_0 是有限集. 又由于 K 是可度量的, 所以 K_1 是有限集. 从而存在 M 的紧集 L, 使 $f(L) = K$.

问题 2.4.16[341] (Olson R C)　具有点可数基空间到具有点可数型空间的商 L 映射是否是可数双商映射?

2.5　闭　映　象

寻求度量空间闭映象的内在特征是 Arhangel'skiĭ[24] 提出的问题. Lašnev[212] 研究了这个问题, 并且给出了 Arhangel'skiĭ 问题的第一个解, Foged[112] 给出了又一个回答. 本节内容由三个部分组成. 第一部分, 建立度量空间闭映象的内在特征,

包含 Foged 的著名定理. 第二部分, 讨论遗传闭包保持集族的一些性质, 由此产生几个度量化定理. 第三部分, 介绍度量空间闭映象的可积性条件.

定义 2.5.1[353] X 称为 Lašnev 空间, 如果 X 是度量空间的闭映象.

显然, Lašnev 性质是可加性和遗传性. 由命题 2.3.19, $S_\omega \times \mathbb{S}_1$ 不是 Lašnev 空间, 因而 Lašnev 性质不是有限可积性.

定义 2.5.2[212] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族. $\mathscr{P}$ 称为遗传闭包保持的, 若对 $H(P) \subset P \in \mathscr{P}$, 集族 $\{H(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是闭包保持的.

遗传闭包保持简记为 HCP. 显然, 局部有限集族 $\Rightarrow$ HCP 集族 $\Rightarrow$ 闭包保持集族. 易验证, 闭映射保持 HCP 集族.

命题 2.5.3[222] 若 $\mathscr{P}$ 是正则空间 X 的遗传闭包保持集族, 则 $\overline{\mathscr{P}}$ 也是 X 的遗传闭包保持集族.

证明 设 $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 若 $\overline{\mathscr{P}}$ 不是 X 的 HCP 集族, 那么对 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $H_\alpha \subset \overline{P}_\alpha$, 使 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{H}_\alpha \notin \tau^c$. 取 $x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha} - \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{H}_\alpha$. 对 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $V_\alpha, U_\alpha \in \tau$, 使 $x \in V_\alpha, \overline{H}_\alpha \subset U_\alpha$ 且 $V_\alpha \cap U_\alpha = \varnothing$, 于是 $H_\alpha \subset U_\alpha \cap \overline{P}_\alpha \subset \overline{U_\alpha \cap P_\alpha}$. 所以

$$x \in \overline{\cup\{\overline{U_\alpha \cap P_\alpha} : \alpha \in \Lambda\}} = \cup\{\overline{U_\alpha \cap P_\alpha} : \alpha \in \Lambda\}.$$

从而有 $\beta \in \Lambda$, 使 $x \in \overline{U_\beta \cap P_\beta}$, 因此 $U_\beta \cap P_\beta \cap V_\beta \neq \varnothing$, 矛盾. 故 $\overline{\mathscr{P}}$ 是 X 的 HCP 集族.

引理 2.5.4[324] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的遗传闭包保持集族. 若 K 是 X 的可数紧集, 则存在 $F \in K^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{P})_{K-F}$ 是有限的.

证明 若不然, 则存在 $\mathscr{P}$ 的可数集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及 X 的序列 $\{x_n\}$, 满足

$$x_1 \in P_1 \cap K,\ x_{n+1} \in P_{n+1} \cap (K - \{x_i : i \leqslant n\}),\ n \in \mathbb{N},$$

则 $\{x_n\}$ 有聚点, 这与 $\mathscr{P}$ 是 HCP 集族相矛盾.

由此, 若 $\mathscr{P}$ 还是 K 的覆盖, 则 $\mathscr{P}$ 的某有限集覆盖 K; 另一方面, 若 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in X - \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\{P \in \mathscr{P} : \{x_n : n \geqslant m\} \cap P \neq \varnothing\}$ 是有限的.

引理 2.5.5[112] 若 $\mathscr{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的遗传闭包保持的闭集族, 那么 $\{\cap\mathscr{P}^* : \mathscr{P}^* \in \mathscr{P}^{<\omega}\}$ 也是遗传闭包保持集族.

证明 若不然, 存在指标集 Λ 及 $\mathscr{P}_\alpha \in \mathscr{P}^{<\omega}, G_\alpha \subset \cap\mathscr{P}_\alpha$, 满足 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{G}_\alpha$ 不是 X 的闭集. 于是有序列 $\{x_n\} \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{G}_\alpha$, 使 $x_n \to x \in X - \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{G}_\alpha$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $\alpha(n) \in \Lambda$, 使 $x_n \in \overline{G}_{\alpha(n)}$. 不妨设所有 $\alpha(n)$ 互不相同. 由 $\mathscr{P}_\alpha$ 的有限性, 存在 $\{\alpha(n)\}$ 的子列 $\{\alpha(n_k)\}$, 使 $\mathscr{P}_{\alpha(n_k)} - \bigcup_{i<k} \mathscr{P}_{\alpha(n_i)} \neq \varnothing$, 于是对 $m \in \mathbb{N}, \{P \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_{\alpha(n_k)} : \{x_{n_k} : k \geqslant m\} \cap P \neq \varnothing\}$ 是无限集, 矛盾.

引理 2.5.6[112] 设 Fréchet 空间 X 具有 k 网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 若 X 的序列 Z 收敛于 $x\in U-Z$, 其中 $U\in\tau$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 Z 终于 $\mathrm{int}(\cup\{P\in\mathscr{P}_m:P\subset U\})$.

证明 对 $n\in\mathbb{N}$, 让 $\mathscr{P}_n^*=\{P\in\mathscr{P}_n:P\subset U\}$. 若引理不成立, 那么可选取 Z 的子列 $\{z_n\}$, 使 $z_n\in U-\mathrm{int}(\cup\mathscr{P}_n^*)\subset\overline{U-\cup\mathscr{P}_n^*}$. 于是存在序列 $\{z_{nk}\}_k\subset U-\cup\mathscr{P}_n^*$, 使 $z_{nk}\to z_n$. 从而 $x\in\overline{\{z_{nk}:n,k\in\mathbb{N}\}}$, 则存在子列 $\{z_{n_jk_j}\}_j$, 使 $z_{n_jk_j}\to x$, 其中 $n_j<n_{j+1}$. 因为 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 k 网, 所以存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\{z_{n_jk_j}\}$ 终于 $\cup\mathscr{P}_m^*$, 这与当 $n_j\geqslant m$ 时 $z_{n_jk_j}\in U-\cup\mathscr{P}_m^*$ 相矛盾.

命题 2.5.7 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖映射. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网, 则 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的 k 网.

定理 2.5.8 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 Lašnev 空间;

(2) X 是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 k 空间且不含闭子空间同胚于 S_2;

(3) X 是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 Fréchet 空间 [112].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $f:M\to X$ 是闭映射, 其中 M 是度量空间. 由命题 2.3.1, X 是 Fréchet 空间. 因为 S_2 不是 Fréchet 空间 (见例 1.8.6), 所以 X 不含闭子空间同胚于 S_2. 设 $\mathscr{P}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 由于 f 是闭映射, 从命题 2.1.16 和 2.5.7, $f(\mathscr{P})$ 是 X 的 σ 遗传闭包保持 k 网.

(2) $\Rightarrow$ (3)[375]. 显然, X 具有点 G_δ 性质. 由推论 2.3.5, X 是序列空间. 如果 X 不是 Fréchet 空间, 那么存在 X 的子集 A, 使 $\overline{A}\neq\widetilde{A}$, 其中 $\widetilde{A}=\{z\in X:$ 存在 A 的序列 $\{z_n\}$ 使 $z_n\to z\}$. 于是 $\widetilde{A}$ 不是 X 的闭集, 从而存在 $\widetilde{A}$ 的非平凡序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in\overline{A}-\widetilde{A}$. 选取 X 的开集列 $\{U_n\}$, 满足 $\overline{U}_{n+1}\subset U_n$ 且 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$. 不妨设 $x_n\in U_n$. 再选取 X 中互不相交的开集列 $\{V_n\}$, 使 $x_n\in V_n$. 对 $n\in\mathbb{N}, A\cap U_n\cap V_n$ 中存在序列 $\{x_{nm}\}_m$ 收敛于 x_n. 令

$$M=\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{x_{nm}:n,m\in\mathbb{N}\},$$

则 M 是 X 的同胚于 S_2 的闭子空间, 矛盾. 故 X 是 Fréchet 空间.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 Fréchet 空间 X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网 $\mathscr{P}$. 由引理 2.5.5, 可以记 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是关于有限交封闭的 HCP 集族且 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 对 $P\in\mathscr{P}_n$, 令

$$R_n(P)=P-\mathrm{int}(\cup\{Q\in\mathscr{P}_n:P\not\subset Q\}),$$
$$\mathscr{R}_n=\{R_n(P):P\in\mathscr{P}_n\}.$$

(8.1) 对 $x\in X$, 设 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in X-\{x_n:n\in\mathbb{N}\}, x\in U\in\tau$. 若 $\{x_n\}$ 终于 $\mathrm{int}(\cup\{P\in\mathscr{P}_m:P\subset U\})$, 则 $\{x_n\}$ 终于 $\mathrm{int}(\cup\mathscr{R}'_m)$, 且 $\cup\mathscr{R}'_m\subset U$, 其中 $\mathscr{R}'_m=\{R\in\mathscr{R}_m:R\cap\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是无限集 $\}$.

事实上, 记 $L=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}, V=\mathrm{int}(\cup\mathscr{P}_m)-\cup\{Q\in\mathscr{P}_m\cup\mathscr{R}_m:Q\cap L$ 是有限集 $\}$, 则 $V\in\tau$. 由引理 2.5.4, $\{x_n\}$ 终于 V. 对 $y\in V$, 若 $y\in Q\in\mathscr{P}_m$, 则 $Q\cap L$ 是无限集, 于是 $\mathscr{P}_m$ 在 y 是点有限的 (由引理 2.5.4), 从而 $\cap(\mathscr{P}_m)_y\in\mathscr{P}_m$. 令 $P(y)=\cap(\mathscr{P}_m)_y$, 那么 $y\notin\cup\{Q\in\mathscr{P}_m:P(y)\not\subset Q\}$, 所以 $y\in R_m(P(y))$, 于是 $R_m(P(y))\cap L$ 是无限集, 因此 $R_m(P(y))\in\mathscr{R}'_m$, 故 $y\in R_m(P(y))\subset\cup\mathscr{R}'_m$. 这说明了 $V\subset\cup\mathscr{R}'_m$, 所以 $\{x_n\}$ 终于 $\mathrm{int}(\cup\mathscr{R}'_m)$. 对 $R_m(P)\in\mathscr{R}'_m$, 存在 $Q\in\mathscr{P}_m$, 使 $R_m(P)\subset P\subset Q\subset U$. 否则, $\mathrm{int}(\cup\{Q\in\mathscr{P}_m:Q\subset U\})\subset\mathrm{int}(\cup\{Q\in\mathscr{P}_m:P\not\subset Q\})\subset X-R_m(P)$, 那么 $\{x_n\}$ 终于 $X-R_m(P)$, 于是 $R_m(P)\cap L$ 是有限集, 矛盾. 因此 $\cup\mathscr{R}'_m\subset U$.

现在, 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{R}^*_n=\mathscr{R}_n\cup\{X-\mathrm{int}(\cup\mathscr{R}_n)\}$, 并且记 $\mathscr{R}^*_n=\{R_\alpha:\alpha\in\Lambda_n\}$. 赋予 Λ_n 离散拓扑. 置

$$M=\{\beta=(\alpha_n)\in\textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n:\{R_{\alpha_n}\}\text{ 是 }X\text{ 中某点 }x(\beta)\text{ 的网 }\},$$

则 M 是可度量空间. 对 $\beta\in M, x(\beta)$ 是唯一确定的. 定义 $f:M\to X$ 为 $f(\beta)=x(\beta)$.

(8.2) f 是满函数. 对 $x\in X$, 若 x 是 X 的孤立点, 那么存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\{x\}\in\mathscr{P}_m$, 于是 $R_m(\{x\})=\{x\}$, 所以有 $\beta\in M$, 使 $f(\beta)=x$. 若 x 是 X 的聚点, 则存在 $X-\{x\}$ 的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x. 对 $n\in\mathbb{N}$, 取定 $\alpha_n\in\Lambda_n$, 使 $R_{\alpha_n}\cap\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$ 是无限集. 如果这点做不到, 则选取 $\alpha_n\in\Lambda_n$, 使 $x\in R_{\alpha_n}$. 那么总有 $x\in R_{\alpha_n}$. 由引理 2.5.6 和 (8.1), $\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的网. 令 $\beta=(\alpha_n)$, 则 $\beta\in M$ 且 $f(\beta)=x$.

(8.3) f 是连续函数. 设 $U\in\tau(X)$ 且 $\beta\in f^{-1}(U)$. 记 $\beta=(\alpha_n)$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $f(\beta)\in R_{\alpha_m}\subset U$, 于是 $\beta\in\{\gamma\in M:\pi_m(\gamma)=\alpha_m\}\subset f^{-1}(U)$, 因而 $f^{-1}(U)\in\tau(M)$.

(8.4) f 是闭映射. 设 $F\in\tau^c(M)$. 若 $x\in\overline{f(F)}-f(F)$, 则存在 $f(F)$ 的序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x. 对 $i\in\mathbb{N}$, 取 $\beta_i=(\alpha_{in})\in F\cap f^{-1}(x_i)$. 那么对 $n\in\mathbb{N}$ 有 $x_i\in R_{\alpha_{in}}\in\mathscr{R}^*_n$. 由引理 2.5.4, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\{R\in\mathscr{R}^*_1:R\cap\{x_i:i\geqslant m\}\neq\varnothing\}$ 是有限集, 因而有 $\mathbb{N}$ 的无限集 I_1 和 $\alpha_1\in\Lambda_1$, 使对 $i\in I_1$ 有 $\alpha_{i1}=\alpha_1$. 由归纳法, 可选取 $\mathbb{N}$ 的递减无限集列 $\{I_n\}$ 和 $\beta=(\alpha_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$, 使当 $n\in\mathbb{N}, i\in I_n$ 时, $\alpha_{in}=\alpha_n$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 选取 $k(n)\in I_n$, 使 $k(n)<k(n+1)$. 那么 $\beta_{k(n)}\to\beta$, 从而 $\beta\in F$. 对 $n\in\mathbb{N}, i\in I_n$, 有 $x_i\in R_{\alpha_n}$, 因而 $x\in R_{\alpha_n}$. 设 $x\in U\in\tau(X)$, 因为 $x_{k(n)}\to x$, 由引理 2.5.4 和 (8.1), 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\{x_{k(n)}\}$ 终于 $\cup\{R\in\mathscr{R}_m:R\cap\{x_{k(n)}:n\in\mathbb{N}\}$ 是无限集 $\}\subset U$. 若 $i\geqslant m$, 则 $k(i)\in I_i\subset I_m$, 于是 $R_{\alpha_m}=R_{\alpha_{k(i)m}}$, 故 $\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的网. 因此 $x=f(\beta)\in f(F)$, 矛盾. 于是 f 是闭映射.

综上所述, X 是 Lašnev 空间.

定义 2.5.9 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族.

(1) $\mathscr{P}$ 称为弱遗传闭包保持集族[74], 若对 $x(P) \in P \in \mathscr{P}$, 集族 $\{\{x(P)\} : P \in \mathscr{P}\}$ 是闭包保持的, 即 $\{x(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 X 的闭离散子空间.

(2) $\mathscr{P}$ 称为可数遗传闭包保持集族 (可数弱遗传闭包保持集族)[120], 若 $\mathscr{P}$ 的每一可数子族是遗传闭包保持的 (弱遗传闭包保持的).

对 X 的集族 $\mathscr{P}$, 置

$$D(\mathscr{P}) = \{x \in X : (\mathscr{P})_x \text{ 不是有限集 }\},$$
$$\mathscr{F}(\mathscr{P}) = \{P - D(\mathscr{P}) : P \in \mathscr{P}\} \cup \{\{x\} : x \in D(\mathscr{P})\}.$$

引理 2.5.10[112, 252] 若 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数弱遗传闭包保持集族, 则 $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ 是紧有限集族.

证明 设 $K \in \mathscr{K}(X)$. 首先, $K \cap D(\mathscr{P})$ 是有限集. 否则, $K \cap D(\mathscr{P})$ 含无限集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 由 $D(\mathscr{P})$ 的定义, 存在 $\mathscr{P}$ 的无限集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $x_n \in P_n$, 从而 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的闭离散集, 这与 K 的紧性相矛盾. 其次, $(\mathscr{F}(\mathscr{P}))_K$ 是有限集. 否则, 有 $\mathscr{P}$ 的无限集 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $(Q_n - D(\mathscr{P})) \cap K \neq \varnothing$, 那么有 K 的无限集 $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ 和集列 $\{Q_{n_i}\}$, 使 $y_i \in Q_{n_i}$, 矛盾. 故 $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ 是紧有限的.

定理 2.5.11[252] X 是 Lašnev 空间当且仅当 X 是具有 σ 紧有限 k 网的正则的 Fréchet 空间.

证明 设 X 是 Lašnev 空间. 由定理 2.5.8, X 是正则的 Fréchet 空间并且具有 k 网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP 且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. 采用引理 2.5.10 的记号, 则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}(\mathscr{P}_n)$ 是 X 的 σ 紧有限 k 网. 只须证它是 k 网. 对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{P} \in \mathscr{P}_m^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{P} \subset U$. 令

$$\mathscr{F} = \{P - D(\mathscr{P}_m) : P \in \mathscr{P}\} \cup \{\{x\} : x \in K \cap D(\mathscr{P}_m)\},$$

则 $\mathscr{F} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}_m)^{<\omega}$ 且 $K \subset \cup\mathscr{F} \subset U$.

反之, 设正则的 Fréchet 空间 X 有 k 网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是紧有限的. 由定理 2.5.8, 只须证 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的 HCP 集族. 记 $\mathscr{P}_n = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 对 $\alpha \in \Lambda_n$ 及 $H_\alpha \subset P_\alpha$, 若存在 $x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda_n} H_\alpha} - \bigcup_{\alpha\in\Lambda_n} \overline{H}_\alpha$, 则有 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda_n} H_\alpha$ 的序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x, 于是 H_α 仅含 $\{x_i\}$ 的有限项, 从而 $\mathscr{P}_n$ 不是紧有限的, 矛盾. 故 X 是 Lašnev 空间.

本节第二部分, 利用上述关于 Lašnev 空间的内在特征建立几个度量化定理.

引理 2.5.12[74] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数遗传闭包保持的开集族, $A \subset X$. 若 $x \in A^d$ 且存在 X 中含 x 的 G_δ 集 G, 使 $G \cap (A - \{x\}) = \varnothing$, 则 $(\mathscr{P})_x$ 是有限的.

证明 若不然, 则存在 $(\mathscr{P})_x$ 的可数集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 记 $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, 其中 $G_n \in \tau$. 令

$$H_1 = A \cap P_1 \cap G_1,\ H_{n+1} = H_n \cap P_{n+1} \cap G_{n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

则 $x \in P_1 \cap G_1 \cap \overline{A - \{x\}} \subset \overline{H_1 - \{x\}} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n - H_{n+1}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{H_n - H_{n+1}}$, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $x \in \overline{H_m - H_{m+1}}$, 从而 $P_{m+1} \cap G_{m+1} \cap (H_m - H_{m+1}) \neq \varnothing$, 矛盾.

推论 2.5.13　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数遗传闭包保持的开集族. 若 X 的聚点 x 具有点 G_δ 性质, 则 $(\mathscr{P})_x$ 是有限的.

推论 2.5.14　设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是空间 X 中点 x 的局部基, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是遗传闭包保持的. 若 x 是 X 的聚点, 则 $\mathscr{P}_n$ 是有限的.

证明　对 $n \in \mathbb{N}, P \in \mathscr{P}_n$, 取定 $x(P) \in P - \{x\}$, 令 $F_n = \{x(P) : P \in \mathscr{P}_n\}$. 则 $F_n \in \tau^c$. 置 $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n, G = X - A$. 那么 $x \in A^d \cap G$, G 是 X 的 G_δ 集且 $G \cap (A - \{x\}) = \varnothing$. 由引理 2.5.12, $\mathscr{P}_n$ 是有限的.

引理 2.5.15[74]　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数弱遗传闭包保持的开集族. 若 X 是 k 空间, 则 $\cap\mathscr{P} \in \tau$.

证明　对 $K \in \mathscr{K}(X)$, 由引理 2.5.4, 存在 $F \in K^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{P})_{K-F}$ 是有限集. 对 $P \in \mathscr{P} - (\mathscr{P})_{K-F}, P \cap K \subset F$, 所以 $K \cap (\cap\mathscr{P}) \in \tau(K)$. 由于 X 是 k 空间, 从而 $\cap\mathscr{P} \in \tau(X)$.

引理 2.5.16[194]　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数弱遗传闭包保持集族. 若 X 是 Fréchet 空间, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的遗传闭包保持集族.

证明　对 $H(P) \subset P \in \mathscr{P}$, 若存在 $x \in \overline{\cup\{H(P) : P \in \mathscr{P}\}} - \cup\{\overline{H(P)} : P \in \mathscr{P}\}$, 则存在 $\cup\{H(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 于是 $H(P)$ 仅含 $\{x_n\}$ 的有限项. 若 $m \in \mathbb{N}$, 则 $\{P \in \mathscr{P} : \{x_n : n \geqslant m\} \cap P \neq \varnothing\}$ 是无限集, 矛盾. 故 $\mathscr{P}$ 是 X 的 HCP 集族.

定理 2.5.17　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是可度量空间;

(2) X 具有 σ 遗传闭包保持基 [74]; (Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理)

(3) X 是具有 σ 可数弱遗传闭包保持基的 k 空间 [74];

(4) X 是具有 σ 可数遗传闭包保持基的点 G_δ 空间 [183];

(5) X 是具有 σ 可数弱遗传闭包保持 k 网的强 Fréchet 空间;

(6) X 是具有 σ 紧有限 k 网的强 Fréchet 空间 [252].

证明　由定理 1.3.2 得 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (6). 由定理 2.5.11 和 2.2.2 得 (6) $\Rightarrow$ (1). 由推论 2.5.14 得 (2) $\Rightarrow$ (3) 和 (4). 由推论 2.5.13 得 (4) $\Rightarrow$ (5). 由引理 2.5.16, 定理 2.5.8 和 2.2.2 得 (5) $\Rightarrow$ (1).

(3) $\Rightarrow$ (5). 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 k 空间 X 的基, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是可数弱遗传闭包保持的. 对 $x \in X$, 由引理 2.5.15, $\{\cap(\mathscr{P}_n)_x\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的局部基, 故 X 强 Fréchet 空间.

下面两个例子对定理 2.5.17 的条件给予说明.

例 2.5.18[74] 存在具有 σ 弱遗传闭包保持基的不可度量的正则空间.

设 A 是基数小于 $\aleph_\omega$ 的序数之集合. 令 $Z=\{0,1\}^A$. 对 $z\in Z,\alpha\in A$, 记 $z(\alpha)=\pi_\alpha(z)$. s 是 Z 的每一坐标为 0 的元, $\mathscr{B}$ 是 s 在积空间 Z 的基本开邻域基. 置

$$X=\{s\}\cup\{z\in Z:\{\alpha\in A:z(\alpha)=0\}\in A^{<\omega}\}.$$

X 赋予如下拓扑: X 的唯一聚点 s 的邻域基是 $\mathscr{B}_{|X}$. 则 X 是非第一可数的正则空间, 所以 X 不是可度量空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 定义

$$\mathscr{P}_{1n}=\{\{z\}:z\in X-\{s\}\text{ 且 }|\{\alpha\in A:z(\alpha)=0\}|=n\},$$

则 $\mathscr{P}_{1n}$ 是 X 的离散开集族. 对 $B\in\mathscr{B}$, 定义

$$\Lambda_B=\{\alpha\in A:\pi_\alpha(B)=\{0\}\},$$

则 $\Lambda_B\in A^{<\omega}$ 且 B 由 Λ_B 唯一确定. 再定义

$$\mathscr{P}_{2n}=\{B\cap X:B\in\mathscr{B}\text{ 且 }\Lambda_B\subset[0,\omega_n]\},$$

其中 ω_n 是基数为 $\aleph_n$ 的第一个序数, 那么 $|\mathscr{P}_{2n}|\leqslant\aleph_n$. 为证 $\mathscr{P}_{2n}$ 是弱遗传闭包保持集族, 只须证对 $B\cap X\in\mathscr{P}_{2n}$, $p(B)\in B\cap X-\{s\}$, 有 $s\notin\overline{\{p(B):B\cap X\in\mathscr{P}_{2n}\}}$. 置

$$\Gamma_B=\{\alpha\in A:p(B)\,(\alpha)=0\},$$

$$\Gamma=\cup\{\Gamma_B:B\cap X\in\mathscr{P}_{2n}\}.$$

那么 $\Gamma_B\in A^{<\omega}$, 于是 $|\Gamma|\leqslant\aleph_n$. 取定 $\beta\in A-\Gamma$. 令

$$V=\{z\in Z:z(\beta)=0\}.$$

那么 $s\in V\cap X\in\tau(X)$ 且 $V\cap\{p(B):B\cap X\in\mathscr{P}_{2n}\}=\varnothing$, 从而

$$s\notin\overline{\{p(B):B\cap X\in\mathscr{P}_{2n}\}}.$$

故 X 具有 σ 弱遗传闭包保持基 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathscr{P}_{1n}\cup\mathscr{P}_{2n})$.

由定理 2.5.17, X 不是 k 空间. 因为 $X=\{s\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\cup\mathscr{P}_{1n}))$, 所以 X 是 σ 闭离散空间, 于是 X 具有点 G_δ 性质. 故具有 σ 弱遗传闭包保持基和点 G_δ 性质的正则空间未必是可度量空间.

例 2.5.19[229, 360] Fortissimo 空间: 具有 σ 可数遗传闭包保持基的不可度量的正则空间.

对不可数集合 X, 取定 p 为 X 的特殊点. X_p 称为 Fortissimo 空间, 如果 X 赋予 Fortissimo 拓扑: 对 $F\subset X,F\in\tau^c(X)$ 当且仅当或者 $p\in F$, 或者 F 是可数集. Fortissimo 空间具有性质:

(1) X_p 是正则的 Lindelöf 空间;

(2) X_p 不具有点 G_δ 性质;

(3) X_p 的任何集族是可数遗传闭包保持集族;

(4) 对 X_p 的不可数集 $A, \{\{x\} : x \in A\}$ 不是闭包保持集族;

(5) X_p 的紧集是有限集.

逐一验证如下.

(1) 显然, X_p 的单点集是闭集, 并且

$$\{\{x\} : x \in X_p - \{p\}\} \cup \{B \subset X_p : p \in B \text{ 且 } |X_p - B| \leqslant \aleph_0\}$$

是 X_p 的闭基, 所以 X_p 是正则空间. 对 X_p 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 取 $U \in (\mathscr{U})_p$, 则 $|X_p - U| \leqslant \aleph_0$, 故 $\mathscr{U}$ 有可数子覆盖.

(2) 对 p 的任一开邻域列 $\{U_n\}, |X_p - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n| \leqslant \aleph_0$, 于是 $\{p\} \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 从而 X_p 不具有点 G_δ 性质.

(3) 设 $\mathscr{P}$ 是 X_p 的集族. 对 $\mathscr{P}$ 的可数集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及 $Q_n \subset P_n$, 令 $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{Q}_n$. 若 $p \in F$, 那么 F 是 X_p 的闭集; 若 $p \notin F$, 那么 $|\overline{Q}_n| \leqslant \aleph_0$, 于是 $|F| \leqslant \aleph_0$, 从而 F 也是 X_p 的闭集. 故 $\mathscr{P}$ 是可数遗传闭包保持集族.

(4) 因为 A 不可数, 所以 $p \in \overline{A - \{p\}}$, 于是 $A - \{p\}$ 不是 X_p 的闭集. 故 $\{\{x\} : x \in A\}$ 不是闭包保持集族.

(5) 不妨设 $p \in K \in \mathscr{K}(X)$. 若 K 是无限集, 取 $K - \{p\}$ 的无限集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 那么 K 的开覆盖 $\{X_p - \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\} \cup \{\{x_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ 不含有限子覆盖, 矛盾. 所以 K 是有限集.

问题 2.5.20[260] 具有 σ 弱遗传闭包保持基的空间是否具有点 G_δ 性质?

问题 2.5.21[262] 具有 σ 紧有限 k 网的正则的 k 空间是否是亚 Lindelöf空间?

本节第三部分, 讨论 Lašnev 空间的可数积性质及相关的逆紧逆象性质. 具有 σ 遗传闭包保持 k 网性质不是有限可积性.

例 2.5.22[193] $S_{\omega_1} \times \mathbb{S}_1$ 不具有 σ 遗传闭包保持 k 网.

设 $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, 其中各 $X_\alpha = \{s\} \cup \{x_{\alpha n} : n \in \mathbb{N}\}$ 的公共点 s 是 X 的唯一聚点且 U 是 s 的开邻域当且仅当对 $\alpha < \omega_1$, 存在 $m_\alpha \in \mathbb{N}$, 满足

$$\{s\} \cup \{x_{\alpha n} : n \geqslant m_\alpha, \alpha < \omega_1\} \subset U,$$

则 X 同胚于 S_{ω_1}.

如果 $\mathscr{F}$ 是 $S_{\omega_1} \times \mathbb{S}_1$ 的 σ- HCP 闭 k 网. 利用超限归纳法, 可选取 $\mathscr{F}$ 的不可数集 $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, 使 $|F_\alpha \cap (\{s\} \times \mathbb{S}_1)| = \aleph_0$. 事实上, 先选取 $\mathscr{F}' \in \mathscr{F}^{<\omega}$, 使 $X_0 \times \mathbb{S}_1 \subset \cup\mathscr{F}'$. 于是存在 $F_0 \in \mathscr{F}'$ 和 $x_0 \in F_0 \cap ((X_0 - \{s\}) \times \mathbb{S}_1)$, 使 $|F_0 \cap (\{s\} \times \mathbb{S}_1)| = \aleph_0$. 假设, 对 $\alpha < \omega_1$, 如果 $\beta < \alpha$, 已选取了 $F_\beta \in \mathscr{F}$ 和 $x_\beta \in F_\beta \cap ((X_\beta - \{s\}) \times \mathbb{S}_1)$, 使 $|F_\beta \cap (\{s\} \times \mathbb{S}_1)| = \aleph_0$. 由于 $S_{\omega_1} \times \mathbb{S}_1$ 的闭集 $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ 与紧集 $X_\alpha \times \mathbb{S}_1$ 不相交, 存在 $\mathscr{F}'' \in \mathscr{F}^{<\omega}$, 使 $X_\alpha \times \mathbb{S}_1 \subset \cup\mathscr{F}'' \subset S_{\omega_1} \times \mathbb{S}_1 - \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, 从而存在 $F_\alpha \in \mathscr{F}''$ 以及 $x_\alpha \in F_\alpha \cap ((X_\alpha - \{s\}) \times \mathbb{S}_1)$, 使 $|F_\alpha \cap (\{s\} \times \mathbb{S}_1)| = \aleph_0$. 因为 $F_\alpha \cap \{x_\beta : \beta < \alpha\} = \varnothing$, 所以当 $\beta < \alpha$ 时, $F_\beta \neq F_\alpha$. 这样, 就选取了 $\mathscr{F}$ 的

不可数集 $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, 使 $|F_\alpha\cap(\{s\}\times\mathbb{S}_1)|=\aleph_0$. 由 $\{s\}\times\mathbb{S}_1$ 的紧性及引理 2.5.4, $\{F\in\mathscr{F}:|F\cap(\{s\}\times\mathbb{S}_1)|=\aleph_0\}$ 是可数的, 矛盾. 故 $S_{\omega_1}\times\mathbb{S}_1$ 不具有 σ 遗传闭包保持 k 网.

引理 2.5.23[172]　设 X,Y 都不是离散空间. 若 $X\times Y$ 是 Lašnev 空间, 则它是可度量空间.

证明　因为 X 是非离散的 Fréchet 空间, 于是 X 含闭子空间同胚于 $\mathbb{S}_1$, 从而 $\mathbb{S}_1\times Y$ 是 Fréchet 空间. 由命题 2.3.19 和定理 2.5.17, Y 是可度量空间. 同理, X 是可度量空间.

定理 2.5.24　设 $\{X_n\}$ 是 Lašnev 空间列.

(1) 若 $Z\subset\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 是 Fréchet 空间, 那么 Z 是 Lašnev 空间 [370];

(2) 若 $|X_n|\geqslant 2$ 且 $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 是 Fréchet 空间, 那么 $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 是可度量空间.

证明　(1) 由定理 2.5.11, X_n 具有 k 网 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_{n,m}$, 其中 $\mathscr{P}_{n,m}$ 是 X_n 的紧有限集族且 $\mathscr{P}_{n,m}\subset\mathscr{P}_{n,m+1}$. 对 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{P}_i=\left(\prod_{n\leqslant i}\mathscr{P}_{n,i}\right)\times\left\{\prod_{n>i}X_n\right\}.$$

那么 $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_i)_{|Z}$ 是正则的 Fréchet 空间 Z 的 σ 紧有限 k 网, 故 Z 是 Lašnev 空间.

(2) 置

$$X=\prod_{n\in\mathbb{N}}X_{2n},\ Y=\prod_{n\in\mathbb{N}}X_{2n-1}.$$

那么 X,Y 都不是离散空间. 由 (1), $X\times Y$ 是 Lašnev 空间, 于是它是可度量空间. 故 $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 是可度量空间.

问题 2.5.25[370]　寻求可数个 Lašnev 空间乘积的子空间的内在刻画?

$\pi_1:S_\omega\times\mathbb{S}_1\to S_\omega$ 是逆紧映射. 虽然 $S_\omega\times\mathbb{S}_1$ 具有 G_δ 对角线, 但是 $S_\omega\times\mathbb{S}_1$ 不具有 σ 遗传闭包保持 k 网 (所以不是 Lašnev 空间). 从而具有 σ 遗传闭包保持 k 网空间或 Lašnev 空间都不满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理. 然而, 有下述结果.

推论 2.5.26[225]　设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 其中 Y 是 Lašnev 空间. 若 X 是具有 G_δ 对角线的 Fréchet 空间, 则 X 是 Lašnev 空间.

证明　显然, X 是仿紧空间. 由推论 2.2.11, 存在度量空间 M 和一对一映射 $g:X\to M$. 对性质 "具有 σ 紧有限 k 网" 应用推论 2.1.9, X 具有 σ 紧有限 k 网. 故 X 是 Lašnev 空间.

2.6　紧覆盖映象

本节的目的是初步介绍 Michael 和 Nagami[289] 关于度量空间在各类紧覆盖映射下象空间的特征. 下节将继续介绍关于紧覆盖开 s 映象的刻画.

定理 2.6.1[289] (1) X 是度量空间的紧覆盖映象当且仅当 X 的每一紧集可度量;

(2) X 是度量空间紧覆盖的商 (伪开, 可数双商) 映象当且仅当 X 是每一紧集可度量的 k 空间 (Fréchet 空间, 强 Fréchet 空间).

证明 (1) 设 X 是度量空间 M 在紧覆盖映射 f 下的象. 对 $K \in \mathscr{K}(X)$, 存在 $L \in \mathscr{K}(M)$, 使 $f(L) = K$. 由于 L 是紧度量空间, 所以 K 是可度量空间. 反之, 设 X 的每一紧集可度量, 令 $M = \oplus\mathscr{K}(X)$. 则 M 是可度量空间, 并且从 M 到 X 的自然映射是紧覆盖映射.

(2) 由命题 2.3.1 得必要性, 由映射引理得充分性.

应当注意, 因为 X 是序列空间当且仅当 X 关于 $\{K \in \mathscr{K}(X) : K$ 是可度量子空间$\}$ 具有弱拓扑, 所以 (2) 中的 k 空间条件与序列空间条件是等价的.

度量空间紧覆盖开映象的刻画依赖下述引理.

引理 2.6.2[289] 设 K 是 X 的可度量的紧集. 若 K 在 X 中具有可数邻域基, 则 K 在 X 中具有可数外基.

证明 分别设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 的可数基和 K 在 X 中的可数开邻域基. 令 $A = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : U_n \supset \overline{U}_m\}$. 那么对 $(n,m,k) \in A\times\mathbb{N}$, 存在 $U_{nm} \in \tau(X)$, 使 $\overline{U}_m \subset U_{nm} \subset \overline{U}_{nm} \subset X-(K-U_n)$. 置 $W(n,m,k) = U_{nm}\cap V_k$. 形如 $W(n,m,k)$ 的集合的有限交全体之集记为 $\mathscr{H}$, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的. 往证 $\mathscr{H}$ 是 K 在 X 中的外基. 对 $p \in K$ 及 $p \in U \in \tau(X)$, 定义

$$B = \{\alpha \in A\times\mathbb{N} : p \in W(\alpha)\};$$

$$H(F) = \bigcap\nolimits_{\alpha\in F} W(\alpha), F \in B^{<\omega}.$$

设不存在 $F \in B^{<\omega}$, 使 $H(F) \subset U$. 取 $p(F) \in H(F) - U$. 置

$$Q(F) = \{p(F') : F \subset F' \in B^{<\omega}\},$$

则 $K\cap\overline{Q(F)} \neq \varnothing$. 否则, 存在 $k,n,m \in \mathbb{N}$, 使 $V_k \cap \overline{Q(F)} = \varnothing$ 且 $p \in \overline{U}_m \subset U_n$. 记 $\alpha = (n,m,k), F' = F\cup\{\alpha\}$. 则 $\alpha \in B$ 且 $p(F') \in W(\alpha)\cap Q(F) \subset V_k\cap Q(F) = \varnothing$, 矛盾. 因此, $\{K\cap\overline{Q(F)} : F \in B^{<\omega}\}$ 具有有限交性质, 从而 $K\cap(\cap\{\overline{Q(F)} : F \in B^{<\omega}\}) \neq \varnothing$. 另一方面, 对 $x \in K-\{p\}$, 选取 $\alpha \in B$, 使 $x \notin \overline{W(\{\alpha\})}$. 于是 $x \notin \overline{Q(\{\alpha\})}$, 因此 $(K-\{p\})\cap(\cap\{\overline{Q(F)} : F \in B^{<\omega}\}) = \varnothing$. 这时, $\cap\{K\cap\overline{Q(F)} : F \in B^{<\omega}\} = \{p\} \subset U$. 由 K 的紧性, 存在 $F \in B^{<\omega}$, 使 $U\cap Q(F) \neq \varnothing$, 矛盾. 故 K 在 X 中具有可数外基.

由引理 2.6.2, 命题 2.4.4, 得下述定理.

定理 2.6.3[289] X 是度量空间的紧覆盖开映象当且仅当 X 的每一紧集可度量且在 X 中具有可数邻域基.

例 2.6.4 紧集可度量与弱第一可数性.

(1) 每一紧集可度量 $\nRightarrow$ k 空间性质, 如 Michael 空间 (例 1.8.8).

(2) 在每一紧集可度量的空间中:

(i) k 空间性质 $\nRightarrow$ Fréchet 性质, 如 Arens 空间 S_2 (例 1.8.6)).

(ii) Fréchet 性质 $\nRightarrow$ 强 Fréchet 性质, 如序列扇 S_ω (例 1.8.7).

(iii) 强 Fréchet 性质 $\nRightarrow$ 第一可数性质, 如例 2.4.13 中的空间 X/K.

(iv) 第一可数性质 $\nRightarrow$ 紧集在 X 中具有可数邻域基, 如蝶形空间 (例 1.8.3). 蝶形空间 X 说明了一个值得注意的事实: X 既是度量空间的紧覆盖映象, 又是度量空间的开映象, 但 X 不是度量空间的紧覆盖开映象.

(3) 每一紧集在 X 中具有可数邻域基 $\nRightarrow$ 每一紧集在 X 中可度量, 如 Alexandroff 双箭空间 (例 1.8.9).

问题 2.6.5 用度量空间的映象刻画性质: 每一紧集是可度量的第一可数空间.

例 2.6.6[205] 闭映射 $\nRightarrow$ 序列覆盖映射.

对 Isbell-Mrówka 空间 $\psi(\mathbb{N})$ (例 1.8.4). 定义 $f:\psi(\mathbb{N})\to\mathbb{S}_1$ 为 $f(\psi(\mathbb{N})-\mathbb{N})=\{0\}$ 且 $f(n)=1/n$. 则 f 是闭映射. 事实上, 设 $\psi(\mathbb{N})$ 的开集 $U\supset f^{-1}(0)$, 则 $\mathbb{N}-U$ 是有限集. 否则, 记 $\{n_i\}$ 是 $\mathbb{N}-U$ 的无限序列. 由 $\mathscr{A}$ 的极大性, 存在 $A\in\mathscr{A}$, 使 A 含数列 $\{n_i\}$ 的无限项, 于是对 A 的有限集 F, $A-F\not\subset U$, 这与 U 是点 A 在 $\psi(\mathbb{N})$ 的邻域相矛盾. 令 $V=\{0\}\cup\{1/n:n\in\mathbb{N}\cap U\}$. 则 V 是 0 在 $\mathbb{S}_1$ 的开邻域且 $f^{-1}(V)=U$. 但 f 不是序列覆盖映射, 否则, 存在 $\psi(\mathbb{N})$ 的紧集 L, 使 $f(L)=\mathbb{S}_1$. 于是 $\psi(\mathbb{N})$ 的稠集 $\mathbb{N}\subset L$, 从而 $\psi(\mathbb{N})=L$, 矛盾.

2.7 s 映象

本节的目的是建立度量空间的各类 s 映象的特征. 度量空间商 s 映象的内在刻画被 Arhangel'skiĭ[24] 认为是 "重要而困难" 的问题. 寻求该问题的解, 以及逐步完善的过程, 经历了 20 年的时间, 直到 1987 年应用 cs^* 网的概念才给出较为满意的答案. 本节从点可数集族着手, 应用 cs^* 网、k 网、基等概念, 描述度量空间的商 s 映象、伪开 s 映象、开 s 映象和闭 s 映象的内在特征.

命题 2.7.1 设 $\mathscr{K},\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖, 其中 $\mathscr{K}\subset\mathscr{K}(X)$. 若 $\mathscr{K},\mathscr{P}$ 满足: 对 $K\in\mathscr{K}$, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限集列 $\{\mathscr{P}_n\}$, 使

(i) 对 $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ 被 K 的有限闭覆盖精确加细①;

(ii) 对 $x\in K$ 及 $P_n\in(\mathscr{P}_n)_x(\forall n\in\mathbb{N})$, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 的网.

则有可度量空间 M 及映射 $f:M\to X$, 具有性质:

①称 K 的覆盖 $\mathscr{U}$ 精确加细 $\mathscr{V}$, 若 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 且每一 $U_\alpha\subset V_\alpha$.

(1) 对 $K\in\mathscr{K}$, 存在 $L\in\mathscr{K}(M)$, 使 $f(L)=K$;

(2) 对 $E\subset X$, 若 $(\mathscr{P})_E$ 可数, 则 $f^{-1}(E)$ 具有可数基.

证明　记 $\mathscr{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对 $i\in\mathbb{N},\Lambda_i$ 是集合 Λ 赋予离散拓扑的空间. 定义

$$M=\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i:\{P_{\alpha_i}\}\text{ 是 } X \text{ 中某点 } x(\beta) \text{ 的网 }\}.$$

则 M 是可度量空间, 并且对 $\beta\in M, x(\beta)$ 是唯一确定的. 于是可以定义函数 $f:M\to X$, 使 $f(\beta)=x(\beta)$. 由 (ii), f 是映射. 由 f 的定义, (2) 成立. 下证 (1) 成立. 对 $K\in\mathscr{K}$, 设 $\mathscr{P}$ 的有限集列 $\{\mathscr{P}_n\}$ 满足 (i) 和 (ii). 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $\Gamma_n\in\Lambda_n^{<\omega}$ 和 K 的闭覆盖 $\{K_\alpha:\alpha\in\Gamma_n\}$, 使 $\mathscr{P}_n=\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma_n\}$ 且 $K_\alpha\subset P_\alpha$. 置

$$L=\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:\bigcap_{i\in\mathbb{N}}K_{\alpha_i}\neq\varnothing\}.$$

则 $L\in\tau^c(\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i)$. 事实上, 如果 $(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i-L$, 则 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}K_{\alpha_i}=\varnothing$, 从而存在 $i_0\in\mathbb{N}$, 使 $\bigcap_{i\leqslant i_0}K_{\alpha_i}=\varnothing$. 令 $W=\{(\beta_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:\beta_i=\alpha_i,i\leqslant i_0\}$. 则 $(\alpha_i)\in W\in\tau(\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i)$ 且 $W\cap L=\varnothing$. 因此, $L\in\mathscr{K}(\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i)$. 对 $\alpha=(\alpha_i)\in L$, 存在 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}K_{\alpha_i}\subset K\cap(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i})$, 于是 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 从而 $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$. 另一方面, 对 $x\in K,i\in\mathbb{N}$, 存在 $\alpha_i\in\Gamma_i$, 使 $x\in K_{\alpha_i}$. 令 $\alpha=(\alpha_i)$. 则 $\alpha\in L$ 且 $f(\alpha)=x$, 因此 $f(L)\supset K$. 故 $f(L)=K$.

命题 2.7.2　设 $f:X\to Y$ 是序列商映射. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^* 网, 则 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的 cs^* 网.

引理 2.7.3[233]　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 cs^* 网. 令 $\mathscr{K}=\mathscr{S}(X)$, 则 $\mathscr{K},\mathscr{P}$ 满足命题 2.7.1 的条件.

证明　对 $K\in\mathscr{K}$, 记 $K=\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, 其中非平凡序列 $x_n\to x$. 先证明, 对 $K\subset U\in\tau$, 存在 $\mathscr{F}\in\mathscr{P}^{<\omega}$ 具有性质 (简记为 $\Phi(K,U)$): $K\subset\cup\mathscr{F}\subset U$, 且 $\mathscr{F}_{|K}\subset\tau^c-\{\phi\}$.

令 $\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}:x\in P\subset U\}=\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 若 $\{x_n\}$ 不终于 $\bigcup_{i\leqslant k}P_i$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k}\in X-\bigcup_{i\leqslant k}P_i$, 从而有 $\{x_{n_k}\}$ 的子列 $\{y_j\}$ 和 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\{y_j\}\subset P_m$, 矛盾. 因此存在 $k\in\mathbb{N}$, 使 $\{x_n\}$ 终于 $\bigcup_{i\leqslant k}P_i$. 由此易作出 $\mathscr{F}\in\mathscr{P}^{<\omega}$ 具有性质 $\Phi(K,U)$.

集族 $\{\mathscr{F}\in\mathscr{P}^{<\omega}:\mathscr{F}$ 具有性质 $\Phi(K,X)\}$ 是可数的, 记其为 $\{\mathscr{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 显然, $\{\mathscr{P}_n\}$ 满足命题 2.7.1 的 (i). 下面验证它满足 (ii).

设 $y\in K$ 及 $P_n\in(\mathscr{P}_n)_y(\forall n\in\mathbb{N})$. 让 $y\in V\in\tau$. 如果 $y=x$, 令 $K_1=V\cap K$, 则存在 $\mathscr{F}'\in\mathscr{P}^{<\omega}$ 具性质 $\Phi(K_1,V)$, 同时存在 $\mathscr{F}''\in\mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $K-K_1\subset\cup\mathscr{F}''\subset X-K_1$, 于是 $\mathscr{F}'\cup\mathscr{F}''$ 具性质 $\Phi(K,X)$, 从而有 $i\in\mathbb{N}$, 使 $\mathscr{F}'\cup\mathscr{F}''=\mathscr{P}_i$, 所以 $y\in P_i\subset\cup\mathscr{F}'\subset V$. 如果 $y\neq x$, 则存在 $P\in\mathscr{P}$, 使 $y\in P\subset V-(K-\{y\})$, 于是存在 $\mathscr{F}'\in\mathscr{P}^{<\omega}$ 具性质 $\Phi(K-\{y\},X-\{y\})$, 那么 $\mathscr{F}'\cup\{P\}$ 具性质 $\Phi(K,X)$, 因此存在 $j\in\mathbb{N}$, 使 $\mathscr{F}'\cup\{P\}=\mathscr{P}_j$, 于是 $y\in P_j=P\subset V$. 故 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y 的网.

定理 2.7.4[233] 下述条件等价:

(1) X 具有点可数 cs^* 网;

(2) X 是度量空间的序列商 s 映象;

(3) X 是度量空间的序列覆盖 s 映象.

证明 由命题 2.7.1 和引理 2.7.3 得 (1) $\Rightarrow$ (3), 由命题 2.1.13 得 (3) $\Rightarrow$ (2), 由 Nagata-Smirnov 度量化定理和命题 2.7.2 得 (2) $\Rightarrow$ (1).

推论 2.7.5[143, 376] 下述条件等价:

(1) X 是具有点可数 cs^* 网的序列空间;

(2) X 是度量空间的序列商的商 s 映象;

(3) X 是度量空间的序列覆盖的商 s 映象;

(4) X 是度量空间的商 s 映象.

证明 由定理 2.7.4, 映射引理和命题 2.3.1 得 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3), 和 (2) $\Leftrightarrow$ (4).

应当提到, (1) 如果将推论 2.7.5 中的 "序列空间" 换为 "Fréchet 空间", 同时将 "商映射" 换为 "伪开映射", 那么结论仍然成立; (2) 在具有点可数 cs^* 网的空间中, k 空间性质 $\not\Rightarrow$ 序列空间性质, 如紧化 $\beta\mathbb{N}$.

推论 2.7.6[167] 具有点可数弱基的空间是度量空间的商 s 映象.

下面转入讨论点可数 cs^* 网、点可数 k 网及度量空间的紧覆盖的商 s 映象之间的关系.

定义 2.7.7 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族. 对 $A \subset X$ 和 $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$,

(1) $\mathscr{F}$ 称为 A 的极小覆盖 [292] (或不可约覆盖 [101]), 如果 $\mathscr{F}$ 覆盖 A, 并且 $\mathscr{F}$ 的任一真子集不能覆盖 A.

(2) $\mathscr{F}$ 称为 A 的极小内部覆盖 [76], 如果 $A \subset (\cup\mathscr{F})^\circ$, 并且对 $\mathscr{F}$ 的任一真子集 $\mathscr{H}$, $A \not\subset (\cup\mathscr{H})^\circ$.

引理 2.7.8[292] (Miščenko 引理) 如果 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖, 那么 X 的任一子集仅有可数个由 $\mathscr{P}$ 的元组成的有限极小覆盖.

证明 设 $A \subset X$ 且 $\{\mathscr{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是由 $\mathscr{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\Psi = \{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda, |\mathscr{P}_\alpha| = n\}$ 是不可数的. 对 $P \in \mathscr{P}$, 令 $\Psi(P) = \{\mathscr{P}_\alpha \in \Psi : P \in \mathscr{P}_\alpha\}$. 取 $x_1 \in A$. 则 $\Psi = \cup\{\Psi(P) : x_1 \in P \in \mathscr{P}\}$. 由于 $\mathscr{P}$ 是点可数的, 于是存在 $P_1 \in \mathscr{P}$, 使 $x_1 \in P_1$ 且 $|\Psi(P_1)| > \aleph_0$. 则 $n > 1$ 且存在 $x_2 \in A - P_1$. 令 $\Psi(P_1, P) = \{\mathscr{P}_\alpha \in \Psi(P_1) : P \in \mathscr{P}_\alpha\}$, 则 $\Psi(P_1) = \cup\{\Psi(P_1, P) : x_2 \in P \in \mathscr{P}\}$. 因此, 存在 $P_2 \in \mathscr{P}$, 使 $x_2 \in P_2 \neq P_1$ 且 $|\Psi(P_1, P_2)| > \aleph_0$. 重复上述过程, 可得到点集 $\{x_i : i \leqslant n\}$ 及集族 $\{P_i\}_{i\leqslant n}$, 满足 $x_i \in P_i \in \mathscr{P}$, 当 $i \neq j \leqslant n$ 时, $P_i \neq P_j$ 且 $|\Psi(P_1, \cdots, P_n)| > \aleph_0$. 但是 $|\Psi(P_1, \cdots, P_n)| = 1$, 矛盾.

引理 2.7.9　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数 k 网. 若 $K \in \mathscr{K}(X)$, 则存在 $\mathscr{P}$ 的覆盖 K 的有限集列 $\{\mathscr{P}_n\}$, 满足命题 2.7.1 的条件 (ii).

证明　由 Miščenko 引理, 记 $\{\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega} : \mathscr{F}$ 是 K 的极小覆盖$\}$ 为 $\{\mathscr{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对 $x \in K$ 及 $P_n \in (\mathscr{P}_n)_x (\forall n \in \mathbb{N})$, 设 $x \in V \in \tau(X)$. 取 $W \in \tau(K)$, 使 $x \in W$ 且 $\mathrm{cl}_K(W) \subset V$. 那么存在 $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2 \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $\mathrm{cl}_K(W) \subset \cup\mathscr{H}_1 \subset V$ 且 $K - W \subset \cup\mathscr{H}_2 \subset X - \{x\}$. 于是 $K \subset \cup(\mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_2)$, 从而存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_2$, 因此 $x \in P_n \subset \cup\mathscr{H}_1 \subset V$. 故 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的网.

由引理 2.7.9, 命题 2.7.1 和映射引理, 有下述推论.

推论 2.7.10[286]　若 X 具有点可数闭 k 网, 则 X 是度量空间的紧覆盖 s 映象. 如果更设 X 是 k 空间, 则 X 是度量空间的紧覆盖的商 s 映象.

引理 2.7.11[227]　设 $f : X \to Y$ 是商映射, 其中 X 是 k 空间. 对 X 的 k 网 $\mathscr{B}$, 若 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的点可数集族, 则 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 k 网.

证明　设 $\mathscr{P} = f(\mathscr{B})$. 对 Y 的紧集 $K \subset U \in \tau(Y)$, 置

$$\mathscr{H} = \{P \in \mathscr{P} : P \cap K \neq \varnothing, P \subset U\}.$$

则存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F}$. 若不然, 对 $y \in K$, 记 $(\mathscr{H})_y = \{P_i(y)\}_{i\in\mathbb{N}}$. 那么存在 K 的子集 $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, 使当 $i, j < n$ 时, $y_n \notin P_i(y_j)$. 取 $a \in A^d$. 令 $L = A - \{a\}$. 则 $L \notin \tau^c(Y)$, 于是存在 $C \in \mathscr{K}(X)$, 使 $L \cap f(C) \notin \tau^c(Y)$ (见命题 2.3.1), 从而 $A \cap f(C)$ 是无限集. 置 $D = f^{-1}(K) \cap C$. 那么存在 $\mathscr{B}' \in \mathscr{B}^{<\omega}$, 使 $D \subset \cup\mathscr{B}' \subset f^{-1}(U)$, 于是 $f(D) \subset \cup f(\mathscr{B}') \subset U$. 而 $f(D) \cap A = f(C) \cap A$, 所以 $(\cup f(\mathscr{B}')) \cap A$ 是无限集, 因此存在 $P \in f(\mathscr{B}') \in \mathscr{H}^{<\omega}$ 含 A 的无限集. 设 $P = P_i(y_j)$, 那么存在 $n > i, j$, 使 $y_n \in P_i(y_j)$, 矛盾. 故 $\mathscr{P}$ 是 Y 的 k 网.

定理 2.7.12　设 X 是局部紧的度量空间. 若 $f : X \to Y$ 是商 s 映射, 则 f 是紧覆盖映射且 Y 具有点可数闭 k 网.

证明　X 具有 σ 局部有限基 $\mathscr{B}$, 满足 $\overline{\mathscr{B}} \subset \mathscr{K}(X)$. 让 $\mathscr{P} = f(\overline{\mathscr{B}})$, 则 $\mathscr{P}$ 是 Y 的点可数闭集族. 由引理 2.7.11, $\mathscr{P}$ 是 Y 的 k 网. 如果 $K \in \mathscr{K}(Y)$, 则存在 $\mathscr{P}' \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{P}'$, 从而存在 $\mathscr{F} \in \overline{\mathscr{B}}^{<\omega}$, 使 $f(\mathscr{F}) = \mathscr{P}'$, 故存在 $L \in \mathscr{K}(X)$, 使 $f(L) = K$. 所以 f 是紧覆盖映射.

Nagami[310] 证明了局部紧仿紧空间上的商 L 映射是紧覆盖映射. 下面构造一例说明推论 2.7.10 不是可逆的.

引理 2.7.13　设 $\mathscr{P}$ 是强 Fréchet 空间 X 的点可数集族. 若 $\mathscr{K}(X)$ 加细 $\mathscr{P}^F$, 那么 $(\mathscr{P}^F)^\circ$ 覆盖 X.

证明　对 X 的可数集 C, 记 $(\mathscr{P})_C = \{P_i(C)\}_{i\in\mathbb{N}}$. 若存在 $x \in X - \cup(\mathscr{P}^F)^\circ$, 由 Fréchet 性质, 可选取 X 的可数集列 $\{C_n\}$, 满足 $C_1 = \{x\}, x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C}_n$, 且当 $i, j < n$ 时, $C_n \cap P_i(C_j) = \varnothing$. 于是 $\mathscr{P}$ 的每一元仅与有限个 C_n 相交.

由强 Fréchet 性质, 存在 $\{C_n\}$ 的子列 $\{C_{n_k}\}$ 和 $x_k \in C_{n_k}$, 使 $x_k \to x$. 因为 $\{x\} \cup \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{K}(X)$, 所以有 $\mathscr{P}$ 的元 P 含 $\{x_k\}$ 的无限项, 从而 P 与无限个 C_n 相交, 矛盾.

例 2.7.14[360, 408]　$\mathbb{R}$ 的点无理扩张拓扑空间 X:

(1) X 具有可数基;

(2) X 不是正则空间;

(3) X 是可分度量空间的紧覆盖开映象;

(4) X 不具有点可数闭 k 网.

取 $X = \mathbb{R}$. 赋予 X 点无理扩张拓扑: 对 $x \in X$, x 的邻域基元形如 $\{x\} \cup (\mathbb{P} \cap U)$, 其中 U 是 x 在 $\mathbb{R}$ 的欧氏邻域. 显然, X 具有可数基. 由于 $\mathbb{Q}$ 是 X 的闭子空间, 并且对 $\mathbb{Q} \subset V \in \tau(X)$ 有 $\overline{V} = X$, 所以 X 不是正则空间. 由命题 2.4.4, X 是可分度量空间的紧覆盖开映象.

设 X 具有点可数闭 k 网 $\mathscr{P}$. 定义 $\mathscr{H} = \{P \in \mathscr{P} : P^\circ = \varnothing\}$, 则 $\mathscr{K}(X)$ 加细 $\mathscr{H}^F$. 事实上, 对 $K \in \mathscr{K}(X)$, 令 $V = (K \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{P}$. 由于 $\mathbb{Q}$ 是 X 的闭离散子空间, 所以 $K \subset V \in \tau$, 于是存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F} \subset V$. 若 $(\cup\mathscr{F})^\circ \neq \varnothing$, 存在 $\mathbb{R}$ 的开区间 J, 使 $J \cap \mathbb{P} \subset \cup\mathscr{F}$, 那么 $\mathbb{Q} \cap J \subset \mathbb{Q} \cap \overline{J \cap \mathbb{P}} \subset \mathbb{Q} \cap V = \mathbb{Q} \cap K$, 从而 $\mathbb{Q} \cap J$ 是有限集, 矛盾. 因此 $(\cup\mathscr{F})^\circ = \varnothing$, 故 $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^{<\omega}$ 且 $K \subset \cup\mathscr{F}$. 从而 $\mathscr{K}(X)$ 加细 $\mathscr{H}^F$. 由引理 2.7.13, $X = \cup(\mathscr{H}^F)^\circ$, 这与 $\mathscr{H}$ 的定义矛盾. 故 X 不具有点可数闭 k 网.

本节第二部分, 探讨度量空间的开 s 映象的内在特征.

引理 2.7.15[76]　若 $\mathscr{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的点可数集族, 则 X 的任一子集仅有可数个由 $\mathscr{P}$ 的元组成的有限极小内部覆盖.

证明　对 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 置

$$\mathscr{H}(\mathscr{F}) = \{H \subset X : \mathscr{F} \text{ 是 } H \text{ 的有限极小内部覆盖}\}.$$

对 $A \subset X$, 若存在不可数个 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $A \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{P}^{<\omega}$ 的不可数集 Ψ, 使当 $\mathscr{F} \in \Psi$ 时, $|\mathscr{F}| = m$ 且 $A \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$. 设 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{P}$ 的满足对不可数个 $\mathscr{F} \in \Psi$ 有 $\mathscr{R} \subset \mathscr{F}$ 的极大子集. 则 $0 \leqslant |\mathscr{R}| < m$ 且 $A \not\subset (\cup\mathscr{R})^\circ$. 取定 $x \in A - (\cup\mathscr{R})^\circ$. 则 $x \in \overline{X - \cup\mathscr{R}}$. 由于 X 是 Fréchet 空间①, 存在 $X - \cup\mathscr{R}$ 的可数集 L, 使 $x \in \overline{L}$. 令 $\Omega = \{\mathscr{F} \in \Psi : \mathscr{R} \subset \mathscr{F}\}$. 若 $\mathscr{F} \in \Omega$, 则 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ$, 于是 L 与 $\mathscr{F}$ 中某元相交. 由 $\mathscr{P}$ 的点可数性和 Ω 的不可数性, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $L \cap P \neq \varnothing$ 且 Ω 中有不可数个元含 P. 这时 $P \notin \mathscr{R}$ 并且在 Ω 中 (因而在 Ψ 中) 有不可数个 $\mathscr{F}$ 含 $\mathscr{R} \cup \{P\}$, 这与 $\mathscr{R}$ 的极大性相矛盾.

①这是唯一使用Fréchet空间之处. 原文为比Fréchet条件弱的countable tightness .称空间X具有countable tightness, 若 $x \in \overline{A} \subset X$, 则存在 A 的可数集 C, 使 $x \in \overline{C}$.

命题 2.7.16[76]　设空间 X 具有点可数集族 $\mathscr{P}$, 满足对 $x \in U \in \tau$, 存在 $\mathscr{F} \in (\mathscr{P})_x^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset U$. 则 X 具有点可数基.

证明　对 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 置

$$\mathscr{H}(\mathscr{F}) = \{H \subset X : \mathscr{F} \text{ 是 } H \text{ 的有限极小内部覆盖}\},$$
$$V(\mathscr{F}) = (\cup(\mathscr{H}(\mathscr{F}) \cap \mathscr{P}))^\circ,$$
$$\mathscr{V} = \{V(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}\}.$$

首先, $\mathscr{V}$ 是 X 的点可数集族. 若 $x \in V(\mathscr{F})$, 则存在 $A \in \mathscr{H}(\mathscr{F}) \cap \mathscr{P}$, 使 $x \in A$. 因为 X 是第一可数空间, 由引理 2.7.15, 只有可数个 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $A \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$, 而 $(\mathscr{P})_x$ 可数, 于是 $(\mathscr{V})_x$ 可数. 其次, $\mathscr{V}$ 是 X 的基. 对 $x \in U \in \tau$, 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset U$. 不妨设 $\mathscr{F}$ 是 $\{x\}$ 的极小内部覆盖. 取 $\mathscr{B} \in (\mathscr{P})_x^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{B})^\circ \subset \cup\mathscr{B} \subset (\cup\mathscr{F})^\circ$. 若 $B \in \mathscr{B}$, 那么 $B \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$, 于是 $(\cup\mathscr{B})^\circ \subset V(\mathscr{F})$, 从而 $x \in V(\mathscr{F}) \subset U$. 即, $\mathscr{V}$ 是 X 的点可数基.

定理 2.7.17　下述条件等价:

(1) X 具有点可数基;

(2) X 是度量空间的紧覆盖的开 s 映象 [289]; (Michael-Nagami 定理)

(3) X 是度量空间的开 s 映象 [333];

(4) X 是度量空间的可数双商 s 映象 [105].

证明　(1) ⇒ (2). 设 X 具有点可数基. 由 Miščenko 引理, X 的紧集在 X 中具有可数外基. 再由命题 2.4.4, X 是度量空间的紧覆盖的开 s 映象.

(2) ⇒ (3) ⇒ (4) 是显然的. 下面证明 (4) ⇒ (1). 设 M 是度量空间且 $f : M \to X$ 是可数双商的 s 映射. 让 $\mathscr{B}$ 是 M 的点可数基. 那么 X 的点可数集族 $f(\mathscr{B})$ 满足命题 2.7.16 的条件, 故 X 具有点可数基.

推论 2.7.18　下述条件等价:

(1) X 具有点可数基;

(2) X 是具有点可数弱基的 Fréchet 空间;

(3) X 是具有点可数 cs^* 网的强 Fréchet 空间.

证明　(1) ⇒ (2) 是显然的, 由推论 1.6.18 和 1.6.20 得 (2) ⇒ (3), 再由推论 2.7.5, 映射引理和定理 2.7.17 得 (3) ⇒ (1).

推论 2.7.19[104, 105] (Filippov 定理)　逆紧映射或可数双商① s 映射保持点可数基性质.

证明　设映射 $f : X \to Y$, 其中 X 具有点可数基. 由定理 2.7.17 和 2.6.1, 具有点可数基的紧空间是可度量的. 于是, 若 f 是逆紧映射, 则 f 是可数双商 s 映

①Filippov[105] 证明双商 s 映射的情形. 开映射 ⇒ 双商映射 ⇒ 可数双商映射.

射. 定理 2.7.17 的 (4) $\Rightarrow$ (1) 已证明了可数双商 s 映射保持点可数基性质. 故 Y 具有点可数基.

1973 年 Michael 和 Nagami[289] 提出问题: 度量空间的商 s 映象是否是度量空间的紧覆盖的商 s 映象? 1999 年陈怀鹏 [87] 构造例子否定了这一问题, 2003 年陈怀鹏[88] 又在假设存在 σ' 集下构造了正则的空间否定了 Michael-Nagami 问题. 这两个例子的构造均较复杂, 读者可参考所列文献.

本节第三部分, 研究度量空间的闭 s 映象的内在特征. 先证明度量空间的一个闭映射性质, 它的更一般形式见定理 3.4.16.

引理 2.7.20[375] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是度量空间. f 是边缘紧映射 (边缘 L 映射) 当且仅当 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω (S_{ω_1}).

证明 仅证明边缘 L 映射的情形. 若 f 是边缘 L 映射, 由引理 2.1.15, 存在度量空间 M 和闭 L 映射 $g: M \to Y$. 让 $\mathscr{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 由命题 2.1.13 和 2.7.2, $g(\mathscr{B})$ 是 Y 的点可数 cs^* 网. 再由例 1.8.7, Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

反之, 若 f 不是边缘 L 映射, 则存在 $s \in Y$, 使 $\partial f^{-1}(s)$ 不是 X 的 Lindelöf 子空间, 于是存在 $\partial f^{-1}(s)$ 的离散闭集 $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 和 X 的离散开集族 $\{D_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, 使 $x_\alpha \in D_\alpha$. 对 $\alpha < \omega_1$, 若 $s \in V \in \tau(Y)$, 那么 $f^{-1}(V) \cap (D_\alpha - f^{-1}(s)) \neq \varnothing$, 即 $V \cap (f(D_\alpha) - \{s\}) \neq \varnothing$, 于是 $s \in \overline{f(D_\alpha) - \{s\}}$. 因为 Y 是 Fréchet 空间, 存在 $E_\alpha = \{y_{\alpha n} : n \in \mathbb{N}\} \subset f(D_\alpha) - \{s\}$, 使 $y_{\alpha n} \to s$. 由于 $\{\overline{f(D_\alpha)}\}_{\alpha<\omega_1}$ 是 Y 的 HCP 集族, $\{E_\alpha \cup \{s\}\}_{\alpha<\omega_1}$ 是 Y 的 HCP 集族. 对 $\alpha < \omega_1$, 由引理 2.5.4, 存在 $F_\alpha \in E_\alpha^{<\omega}, \Lambda_\alpha \in \omega_1^{<\omega}$, 使当 $\beta \in \omega_1 - \Lambda_\alpha$ 时, $(E_\alpha - F_\alpha) \cap E_\beta = \varnothing$. 令 $K_\alpha = E_\alpha - F_\alpha$. 由超限归纳法, 可选取 ω_1 的不可数集 Γ, 使 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是互不相交的集族. 这时, Y 的闭子空间 $\{s\} \cup (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} K_\alpha)$ 同胚于 S_{ω_1}.

定理 2.7.21 下述条件等价:

(1) X 是度量空间的闭 s 映象;

(2) X 是 Fréchet 的 $\aleph$ 空间 [131];

(3) X 是不含闭子空间同胚于 S_{ω_1} 的 Lašnev 空间 [375].

证明 由定理 2.5.8 和例 1.8.7 得 (2) $\Rightarrow$ (3), 再由引理 2.7.20 和 2.1.15 得 (3) $\Rightarrow$ (1). 下面证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 M 是度量空间且 $f: M \to X$ 是闭 s 映射. 显然, X 是仿紧的 Fréchet 空间. 设 $\mathscr{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 让 $\mathscr{P} = f(\mathscr{B})$. 由命题 2.1.16 和 2.5.7, $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 局部可数 k 网. 记 $\mathscr{P} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_i$, 其中 $\mathscr{P}_i$ 是局部可数集族且 $\mathscr{P}_i \subset \mathscr{P}_{i+1}$. 对 $i \in \mathbb{N}$, 由 $\mathscr{P}_i$ 的局部可数性及 X 的仿紧性, 存在 X 的局部有限开覆盖 $\mathscr{U}_i$, 使 $\mathscr{U}_i$ 的每一元仅与 $\mathscr{P}_i$ 的可数个元相交, 于是 $\mathscr{P}_i \wedge \mathscr{U}_i$ 是 σ 局部有限集族. 往证 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathscr{P}_i \wedge \mathscr{U}_i)$ 是 X 的 k 网. 对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau(X)$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{P}' \in \mathscr{P}_m^{<\omega}, \mathscr{U}' \in \mathscr{U}_m^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{P}' \subset U$ 且 $K \subset \cup\mathscr{U}'$, 于是

$\mathscr{P}' \wedge \mathscr{U}' \in (\mathscr{P}_m \wedge \mathscr{U}_m)^{<\omega}$ 且 $K \subset \cup(\mathscr{P}' \wedge \mathscr{U}') \subset U$. 故 X 是 $\aleph$ 空间.

2.8 ss 映象

作为度量空间 s 映象的特殊情况, 本节将介绍度量空间的 ss 映象. 1996 年刘川和戴牧民[259] 获得了局部可分度量空间商 s 映象的第一个内在刻画. 寻求它的简洁刻画还是一个尚未解决的问题[261]. ss 映射在刻画局部可分度量空间的映象中有独特的作用. 本节的内容主要有四部分, 一是可分度量空间的映象; 二是度量空间的商 ss 映象; 三是度量空间的伪开 ss 映象、闭 ss 映象和局部可分度量空间的伪开 s 映象、闭 s 映象; 四是给出一些例对几类与 s 映象、ss 映象有关的附加条件进行说明.

定义 2.8.1[220] 设映射 $f: X \to Y$. f 称为 ss 映射, 如果对 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V, 使 $f^{-1}(V)$ 是 X 的可分子空间.

首先, 描述度量空间的 ss 映象的特征. 注意到, 若 $f: X \to Y$ 是 ss 映射, 则 X 是局部可分空间.

命题 2.8.2 设映射 $f: X \to Y$. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的网, 则 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的网.

由此, cosmic 空间的正则映象是 cosmic 空间.

定理 2.8.3[245] X 具有局部可数网当且仅当 X 是度量空间的 ss 映象.

证明 若取 $\mathscr{K} = \{\{x\} : x \in X\}$, $\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数网, 由命题 2.7.1 得必要性. 反之, 设 X 是度量空间 M 在 ss 映射 f 下的象. 让 $\mathscr{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 则 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的网. 对 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 V, 使 $f^{-1}(V)$ 是 M 的可分子空间, 于是 $f^{-1}(V)$ 仅与 $\mathscr{B}$ 中可数个元相交, 从而 V 仅与 $f(\mathscr{B})$ 中可数个元相交, 因此 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的局部可数网.

推论 2.8.4[280] 正则空间 X 是 cosmic 空间当且仅当 X 是可分度量空间的映象.

其次, 讨论度量空间的商 ss 映象的内在特征. 集族 $\mathscr{U}$ 称为星可数的, 若对 $U \in \mathscr{U}$, $(\mathscr{U})_U$ 是可数的.

引理 2.8.5[151] 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的星可数集族. 则 $\mathscr{U} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{U}_\alpha$, 其中 $\mathscr{U}_\alpha$ 是可数的, 且当 $\alpha \neq \beta \in \Lambda$ 时, $(\cup \mathscr{U}_\alpha) \cap (\cup \mathscr{U}_\beta) = \varnothing$.

证明 对 $A, B \in \mathscr{U}$, 称 $A \sim B$ 当且仅当存在 $\mathscr{U}$ 的有限集 $\{U_i\}_{i \leqslant n}$, 使 $A = U_1, B = U_n$, 且对 $i < n$ 有 $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$. 对 $A \in \mathscr{U}$, 令 $\mathscr{U}_A = \{B \in \mathscr{U} : A \sim B\}$. 那么 $\mathscr{U}_A$ 是可数族. 这时, $\mathscr{U} = \cup\{\mathscr{U}_A : A \in \mathscr{U}\}$, 且对 $A, B \in \mathscr{U}$, $(\cup \mathscr{U}_A) \cap (\cup \mathscr{U}_B) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\mathscr{U}_A = \mathscr{U}_B$.

定理 2.8.6[220] 下述条件等价:

(1) X 具有局部可数 cs^* 网;

(2) X 具有局部可数 cs 网;

(3) X 是度量空间的序列商 ss 映象;

(4) X 是度量空间的序列覆盖 ss 映象;

(5) X 是度量空间的紧覆盖 ss 映象;

若更设 X 是正则空间, 它们也等价于:

(6) X 具有局部可数 k 网.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数 cs^* 网. 对 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 V_x, 使 V_x 仅与 $\mathscr{P}$ 中可数个元相交. 令 $\mathscr{U} = \{P \in \mathscr{P} : \text{存在 } V_x \supset P\}$. 则 $\mathscr{U}$ 是星可数的. 由引理 2.8.5, $\mathscr{U} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{U}_\alpha$, 其中 $\mathscr{U}_\alpha$ 是可数的, 且当 $\alpha \neq \beta \in \Lambda$ 时, $(\cup\mathscr{U}_\alpha) \cap (\cup\mathscr{U}_\beta) = \varnothing$. 再令 $\mathscr{F} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{U}_\alpha^F$. 则 $\mathscr{F}$ 仍是局部可数的. 下面证明 $\mathscr{F}$ 是 X 的 cs 网. 设 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in V \in \tau$. 由引理 2.7.3, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{P}' \in (\mathscr{P})_x^{<\omega}$, 使 $\{x\} \cup \{x_n : n \geqslant m\} \subset \cup\mathscr{P}' \subset V \cap V_x$, 这时有唯一的 $\alpha \in \Lambda$, 使 $x \in \cup\mathscr{U}_\alpha$, 所以 $\cup\mathscr{P}' \in \mathscr{U}_\alpha^F$. 从而 $\mathscr{F}$ 是 X 的 cs 网.

(2) $\Rightarrow$ (5). 设 $\mathscr{K} = \mathscr{K}(X)$, $\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数 cs 网. 只须证 $\mathscr{K}, \mathscr{P}$ 满足命题 2.7.1 的条件. 对 $K \in \mathscr{K}$, 则 $\mathscr{P}_{|K}$ 是 K 的可数 cs 网, 所以 K 是可度量的. 令 $\mathscr{P}' = (\mathscr{P})_K$, 由于集族

$$\{\mathscr{F} \in \mathscr{P}'^{<\omega} : \mathscr{F} \text{ 被 } K \text{ 的有限闭覆盖精确加细}\}$$

是可数的, 记其为 $\{\mathscr{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 下面证明 $\{\mathscr{P}_n\}$ 满足命题 2.7.1 的 (ii). 设 $x \in K$ 及 $P_n \in (\mathscr{P}_n)_x (\forall n \in \mathbb{N})$. 如果 $x \in V \in \tau(X)$, 存在 x 在 K 的开邻域 W, 使 $\mathrm{cl}_K(W) \subset V$. 设 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 K 中递减的局部基. 让

$$\mathscr{P}_x = \{P \cap K : P \in \mathscr{P}',\ P \subset V \text{ 且存在 } i \in \mathbb{N},\ \text{使 } V_i \subset P \cap K\}.$$

由命题 1.6.21 所证, $\mathscr{P}_x$ 是 x 在 K 的邻域基. 于是存在 $P_x \in \mathscr{P}$, 使 $x \in \mathrm{int}_K(P_x \cap K) \subset P_x \subset V$. 从而存在 $V_x \in \tau(K)$, 使 $x \in V_x \subset \mathrm{cl}_K(V_x) \subset \mathrm{int}_K(P_x \cap K)$. 紧集 $K - V_x \subset X - \{x\} \in \tau(X)$, 由前所证, 对 $y \in K - V_x$, 存在 $P_y \in \mathscr{P}, V_y \in \tau(K)$, 使 $y \in V_y \subset \mathrm{cl}_K(V_y) \subset \mathrm{int}_K(P_y \cap K) \subset P_y \subset X - \{x\}$. 这时 $K - V_x$ 的开覆盖 $\{V_y : y \in K - V_x\}$ 存在有限子覆盖 $\{V_{y_k}\}_{k\leqslant m}$. 让 $\mathscr{F} = \{P_x\} \cup \{P_{y_k} : k \leqslant m\}$. 则 $\mathscr{F}$ 被 K 的有限闭覆盖精确加细, 所以存在 $j \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{F} = \mathscr{P}_j$, 那么 $x \in P_j = P_x \subset V$. 故 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的网.

(5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 由定理 1.3.2 和命题 2.7.2, (3) $\Rightarrow$ (1). 由命题 1.6.7, (1) $\Rightarrow$ (6). 最后, 设正则空间 X 具有局部可数 k 网, 那么 X 具有局部可数闭 k 网, 于是 X 具有局部可数 cs^* 网.

推论 2.8.7[280]　正则空间 X 是 $\aleph_0$ 空间当且仅当 X 是可分度量空间的紧覆盖 (序列覆盖, 序列商) 映象.

例 2.8.8[386]　连通的 $\aleph_0$ 空间不是连通度量空间的映象.

取定 $p \in \beta\mathbb{R} - \mathbb{R}$, 让 $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. 赋予 X 为紧化 $\beta\mathbb{R}$ 的子空间拓扑, 则 X 是连通空间. 由例 2.3.18, $\mathbb{R}$ 中不存在序列收敛于 p, 所以 X 具有可数 cs 网, 因而 X 是 $\aleph_0$ 空间. 又由于 X 不是 s 连通空间, 由定理 2.3.16, X 不是连通度量空间的映象.

引理 2.8.9[224]　具有 σ 局部可数 cs^* 网的 k 空间是亚 Lindelöf 的序列空间.

证明　设 k 空间 X 具有 σ 局部可数 cs^* 网 $\mathscr{P}$. 对 $K \in \mathscr{K}(X)$, $\mathscr{P}_{|K}$ 是 K 的可数网, 所以 K 是可度量的. 由推论 2.3.5, X 是序列空间.

设 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 关于有限交封闭, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是局部可数的且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. 先证明, 对 X 的任一局部可数集族 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, 存在点可数的开集族 $\mathscr{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, 使 $F_\alpha \subset W_\alpha$; 简称 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{F}$ 的点可数开扩张. 置

$$\Lambda = \{\lambda : \lambda \text{ 是由 } \mathbb{N} \text{ 的元组成的有限序列 }\}.$$

对 $\lambda \in \Lambda$, 按如下方式归纳定义 X 的局部可数集族 $\mathscr{F}(\lambda) = \{F_\alpha(\lambda)\}_{\alpha\in\Gamma}$. 令 $\mathscr{F}(\varnothing) = \mathscr{F}$, 其中 $F_\alpha(\varnothing) = F_\alpha$. 如果已定义了局部可数族 $\mathscr{F}(\lambda)$, 对 $n \in \mathbb{N}$, 记 λn 为有限序列 λ 后加一项 n, 置

$$\mathscr{P}(\lambda n) = \{P \in \mathscr{P}_n : \text{ 仅对可数个 } \alpha \in \Gamma \text{ 有 } F_\alpha(\lambda) \cap P \neq \varnothing\};$$
$$F_\alpha(\lambda n) = \cup\{P \in \mathscr{P}(\lambda n) : F_\alpha(\lambda) \cap P \neq \varnothing\},\ \alpha \in \Gamma;$$
$$\mathscr{F}(\lambda n) = \{F_\alpha(\lambda n) : \alpha \in \Gamma\}.$$

对 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 V, 使 V 仅与 $\mathscr{P}_n$ 中可数个元相交. 记

$$(\mathscr{P}_n)_V \cap \mathscr{P}(\lambda n) = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

对 $i \in \mathbb{N}$, 存在 Γ 的可数集 Γ_i, 使当 $\alpha \in \Gamma - \Gamma_i$ 时, $P_i \cap F_\alpha(\lambda) = \varnothing$. 于是

$$|\{\alpha \in \Gamma : \text{ 存在 } i \in \mathbb{N}, \text{ 使 } P_i \cap F_\alpha(\lambda) \neq \varnothing\}| \leqslant \aleph_0.$$

即仅对 Γ 中可数个 α 有 $V \cap F_\alpha(\lambda n) \neq \varnothing$, 因而 $\mathscr{F}(\lambda n)$ 是局部可数集族.

对 $\alpha \in \Gamma$, 令$W_\alpha = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\alpha(\lambda)$. 则 $F_\alpha \subset W_\alpha$, 且 W_α 是 X 的序列开集. 事实上, 设序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in W_\alpha$, 于是有 $\lambda \in \Lambda$, 使 $x \in F_\alpha(\lambda)$, 从而存在 x 的开邻域 W, 使 $(\mathscr{F}(\lambda))_W$ 是可数集族. 由引理 2.7.3 所证, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{H} \in (\mathscr{P}_k)_x^{<\omega}$, 使 $\{x_n\}$ 终于 $\cup\mathscr{H} \subset W$. 由于 $\cup\mathscr{H} \subset F_\alpha(\lambda k) \subset W_\alpha$, 所以 $\{x_n\}$ 终于 W_α. 故 W_α 是 X 的序列开集. 而 X 是序列空间, 所以 W_α 是 X 的开集.

再置 $\mathscr{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. 则 $\mathscr{W}$ 是点可数的. 否则, 存在 $x \in X$ 和 Γ 的不可数集 Γ', 使当 $\alpha \in \Gamma'$ 时, $x \in W_\alpha$. 对 $\alpha \in \Gamma'$, 存在 $\lambda_\alpha \in \Lambda$, 使 $x \in F_\alpha(\lambda_\alpha)$, 于是存在 Γ' 的不可数集 Γ'' 和 $\lambda \in \Lambda$, 使当 $\alpha \in \Gamma''$ 时, $\lambda_\alpha = \lambda$, 即 $x \in F_\alpha(\lambda)$, 这与 $\mathscr{F}(\lambda)$ 的点可数性相矛盾.

下面证明 X 是亚 Lindelöf 空间. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}$ 存在加细 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_i$, 其中 $\mathscr{F}_i=\{F_\alpha:\alpha\in\Gamma_i\}$ 是局部可数集族. 对 $i\in\mathbb{N}$, 设 $\mathscr{W}_i=\{W_\alpha:\alpha\in\Gamma_i\}$ 是 $\mathscr{F}_i$ 的点可数开扩张. 对 $\alpha\in\Gamma_i$, 选取 $U_\alpha\in\mathscr{U}$, 使 $F_\alpha\subset U_\alpha$. 那么 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{U_\alpha\cap W_\alpha:\alpha\in\Gamma_i\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点可数开加细. 故 X 是亚 Lindelöf 空间.

引理 2.8.10　局部可分的亚 Lindelöf 空间是可分、Lindelöf 空间的拓扑和.

证明　设 X 是局部可分的亚 Lindelöf 空间. 则 X 存在由可分子空间组成的点可数开覆盖 $\mathscr{U}$. 由于可分空间的点可数开集族是可数族, 所以 $\mathscr{U}$ 是星可数集族. 由引理 2.8.5, X 具有互不相交的开覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使 X_α 是 X 的可分子空间, 因此 $X=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$. 因为可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间, 所以 X_α 是可分的 Lindelöf 空间.

推论 2.8.11[220, 224]　下述条件等价:

(1) X 是具有局部可数 cs^* 网的 k 空间;

(2) X 是具有可数 cs 网的序列空间族的拓扑和;

(3) X 是度量空间的紧覆盖 (序列商, 序列覆盖) 的商 ss 映象;

(4) X 是度量空间的商 ss 映象;

若更设 X 是正则空间, 它们也等价于:

(5) X 是具有局部可数 k 网的 k 空间.

证明　由定理 2.8.6, 引理 2.8.9 和 2.8.10 得 (1) $\Leftrightarrow$ (2). 由定理 2.8.6 和映射引理得 (1) $\Rightarrow$ (3). (3) $\Rightarrow$ (4) 是显然的. 由命题 2.3.1, 映射引理和命题 2.7.2 得 (4) $\Rightarrow$ (1). 在正则空间条件下, 由定理 2.8.6 得 (1) $\Leftrightarrow$ (5).

本节第三部分, 讨论度量空间的伪开 ss 映象、闭 ss 映象以及局部可分度量空间的伪开 s 映象、闭 s 映象的内在刻画.

引理 2.8.12　下述条件等价 [143]:

(1) X 是具有可数 cs^* 网的 Fréchet 空间;

(2) X 是可分度量空间的伪开映象;

(3) X 是可分空间, 又是度量空间的伪开 s 映象;

若更设 X 是正则空间, 它们也与下述条件等价 [112]:

(4) X 是 Fréchet 的 $\aleph_0$ 空间;

(5) X 是可分度量空间的闭映象.

证明　由命题 2.7.1, 引理 2.7.3 和映射引理得 (1) $\Rightarrow$ (2). (5) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 由引理 2.7.11 得 (2) $\Rightarrow$ (4). 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1) 和 (4) $\Rightarrow$ (5).

(3) $\Rightarrow$ (1). 由命题 2.3.1, X 是 Fréchet 空间. 由推论 2.7.5, X 具有点可数 cs^* 网 $\mathscr{P}$. 设 D 是 X 的可数稠集, 令 $\mathscr{H}=(\mathscr{P})_D$. 则 $\mathscr{H}$ 可数. 往证 $\mathscr{H}$ 是 X 的 cs^* 网. 设 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in U\in\tau$. 定义

$$S = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathscr{H}' = \{H \in \mathscr{H} : x \in H \subset U\}.$$

下面将会说明 $\mathscr{H}' \neq \varnothing$. 记 $\mathscr{H}' = \{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

断言: 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $x \in \mathrm{int}_S((\bigcup_{i\leqslant m} H_i) \cap S)$. 否则, 存在序列 $\{z_m\}$, 满足 $z_m \to x$ 且 $z_m \in S - \bigcup_{i\leqslant m} H_i$. 注意到, $(\bigcup_{i\leqslant m} H_i) \cap S$ 是 X 的闭集, 于是 $z_m \in \overline{D - (\bigcup_{i\leqslant m} H_i) \cap S}$, 从而存在 $D - (\bigcup_{i\leqslant m} H_i)$ 的序列 $\{z_{mk}\}_k$ 收敛于 z_m. 因此 $x \in \overline{\{z_{mk} : m, k \in \mathbb{N}\}}$, 所以存在子列 $\{z_{m_j k_j}\}$ 收敛于 x, 其中 $m_j \to +\infty$. 不妨设存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $\{x\} \cup \{z_{m_j k_j} : j \in \mathbb{N}\} \subset P \subset U$. 那么 $P \in \mathscr{H}'$ (这也表明 $\mathscr{H}' \neq \varnothing$), 于是有 $i \in \mathbb{N}$, 使 $P = H_i$. 选取 $j \in \mathbb{N}$, 使 $m_j \geqslant i$, 那么 $z_{m_j k_j} \notin P$, 矛盾.

由此, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 满足 $x \in \mathrm{int}_S((\bigcup_{i\leqslant m} H_i) \cap S)$, 从而存在 S 的子列 $\{x_{n_j}\}$ 和 $i \in \mathbb{N}$, 使 $\{x\} \cup \{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\} \subset H_i \subset U$. 因此, $\mathscr{H}$ 是 X 的可数 cs^* 网.

(4) $\Rightarrow$ (5). 由定理 2.7.21, 存在度量空间 M 和闭 s 映射 $f : M \to X$. 由于 X 是 Lindelöf 空间且 f 是闭 L 映射, 于是 M 是 Lindelöf 空间. 故 X 是可分度量空间的闭映象.

注意到, 伪开 s 映象保持遗传亚 Lindelöf 性 (见附录 A 推论 5.3). 再由推论 2.8.11, 引理 2.8.10 和 2.8.12, 有下述定理.

定理 2.8.13[220, 224] 下述条件等价:

(1) X 是具有局部可数 cs^* 网的 Fréchet 空间;

(2) X 是局部可分度量空间的伪开 s 映象;

(3) X 是度量空间的伪开 ss 映象;

(4) X 是局部可分空间, 又是度量空间的伪开 s 映象;

若更设 X 是正则空间, 它们也与下述条件等价:

(5) X 是局部可分度量空间的闭 s 映象;

(6) X 是局部可分空间, 又是度量空间的闭 s 映象.

例 2.7.14 说明了引理 2.8.12 和定理 2.8.13 中正则性的要求是重要的. 下一例说明定理 2.8.6 和推论 2.8.11 中正则性也是必不可少的.

例 2.8.14 半圆盘拓扑空间 X (例 2.2.20(3)):

(1) X 不是亚 Lindelöf 空间;

(2) X 不具有点可数的 cs^* 网;

(3) X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网.

易验证, X 是可分的第一可数空间, 但 X 不是 Lindelöf 空间. 这表明 X 不是亚 Lindelöf 空间, 从而 X 不具有点可数基. 由推论 2.7.18, X 不具有点可数的 cs^* 网.

对 $x \in \mathbb{R}^2, r > 0$, 记 $\mathrm{B}(x, r)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的球形邻域. 置

$$\mathscr{P}=\{\{p\}:p\in L\}\cup\{\mathrm{B}(q,1/n)\cap S:q\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},n\in\mathbb{N}\}.$$

由于 L 是 X 的闭离散集, 所以 $\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数且 σ 离散集族. 往证 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网. 设 X 的紧集 $K\subset U\in\tau$ (半圆盘拓扑). 对 $x\in X$, 让 $\{P\in\mathscr{P}:x\in P\subset U\}=\{P_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$. 那么 K 被 $\{P_i(x):x\in K,i\in\mathbb{N}\}$ 的某有限集所覆盖. 若不然, 则存在 K 的序列 $\{p_n\}$, 使当 $i,j<n$ 时, $p_n\notin P_i(p_j)$. 于是 $\{p_n\}$ 的某子列 $\{p_{n_k}\}$ 收敛于 $p\in K$. 由于 L 是离散的, 不妨设所有的 $p_{n_k}\in S$, 则在欧氏子空间拓扑 τ^* 中序列 $\{p_{n_k}\}$ 收敛于 p, 又由于 $\{\mathrm{B}(q,1/n)\cap X:q\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},n\in\mathbb{N}\}$ 是 τ^* 的可数基, 于是存在 $q\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, 和 $h,m\in\mathbb{N}$, 使 $\{p\}\cup\{p_{n_k}:k\geqslant h\}\subset\mathrm{B}(q,1/m)\cap X\subset U$, 从而 $\{p_{n_k}:k\geqslant h\}\subset\mathrm{B}(q,1/m)\cap S\subset U$. 因而, 存在 $i,j\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{B}(q,1/m)\cap S=P_i(p_j)$, 取 $n>i,j$, 使 $p_n\in P_i(p_j)$, 矛盾. 因此, $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网.

例 2.8.15　Michael 直线 (例 1.8.5): 度量空间的紧覆盖的开 s 映象.

例 1.8.5 已证明, Michael 直线 X 是具有点可数基的正则 Lindelöf 空间. 由定理 2.7.17, X 是度量空间的紧覆盖的开 s 映象. 但 X 不是 β 空间, 因而它不是 $\aleph_0$ 空间. 这表明引理 2.8.12(3) 和定理 2.8.13(4) 中的可分性不可换成 Lindelöf 性.

例 2.8.16[143]　存在局部紧度量空间 M 和紧覆盖的商有限到一映射 $f:M\to X$, 使 X 是非亚 Lindelöf 的可分, 正则空间.

定义

$$X=\mathbb{I}\times\mathbb{S}_1,\ Y=\mathbb{I}\times(\mathbb{S}_1-\{0\}).$$

X 赋予下述拓扑: Y 作为 X 的子空间具有欧氏拓扑. $(t,0)\in X$ 的邻域基元形如

$$\{(t,0)\}\cup(\cup\{V(t,k):k\geqslant n\}),\ n\in\mathbb{N};$$

其中 $V(t,k)$ 是 $(t,1/k)$ 在子空间 $\mathbb{I}\times\{1/k\}$ 的开邻域. 置

$$M=(\oplus\{\mathbb{I}\times\{1/n\}:n\in\mathbb{N}\})\oplus(\oplus\{\{t\}\times\mathbb{S}_1:t\in\mathbb{I}\}),$$

那么 M 是局部紧的可度量空间. 让 $f:M\to X$ 是自然映射. 因为 X 关于点有限覆盖 $\{\mathbb{I}\times\{1/n\}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{\{t\}\times\mathbb{S}_1:t\in\mathbb{I}\}$ 具有弱拓扑, 由命题 2.3.3, f 是商有限到一映射. 再由定理 2.7.12, f 是紧覆盖映射.

显然, X 是正则的可分空间. 因为 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的不可数的闭离散子空间, 所以 X 不是 Lindelöf 空间, 从而 X 不是亚 Lindelöf 空间. 由引理 2.8.9, X 不具有 σ 局部可数 cs^* 网.

这说明, (1) 引理 2.8.12(3) 和定理 2.8.13(4) 中的伪开映射不可减弱为商映射; (2) 局部紧度量空间的紧覆盖的商有限到一映象未必具有 σ 局部可数 cs^* 网; (3) 局部可分度量空间的商 s 映象未必是度量空间的商 ss 映象.

例 2.8.17[224]　具有局部可数 k 网的正则空间未必是 $\aleph$ 空间.

取 $X=\omega_1\times\mathbb{S}_1$. X 赋予下述拓扑: $X-(\omega_1\times\{0\})$ 的点是 X 的孤立点; $(\alpha,0)\in X$ 的邻域基元形如 $\{(\alpha,0)\}\cup(\bigcup_{n\geqslant m}(V(\alpha,n)\times\{1/n\}))$, 其中 $m\in\mathbb{N}, V(\alpha,n)$ 是 α 在 ω_1 中关于序拓扑的开邻域. 则 X 是正则空间. 置

$$\mathscr{P}=\{\{x\}:x\in X\}\cup\{\{\alpha\}\times(\{0\}\cup\{1/n:n\geqslant m\}):\alpha<\omega_1,m\in\mathbb{N}\},$$

则 $\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数集族. 设 $K\in\mathscr{K}(X)$. 那么

(17.1) 对 $s\in\mathbb{S}_1$, $K\cap(\omega_1\times\{s\})$ 是有限集;

(17.2) 若 $(\alpha,0)\in\omega_1\times\{0\}-K$, 仅对有限个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $(\alpha,1/n)\in K$;

(17.3) $K-\cup\{\{\alpha\}\times\mathbb{S}_1:(\alpha,0)\in K\cap(\omega_1\times\{0\})\}$ 是有限集.

于是 $\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数 k 网.

定义 $f=\pi_1:X\to\omega_1$. 赋予 ω_1 序拓扑, 则 f 是伪开紧映射. 若 X 是 $\aleph$ 空间, 那么 ω_1 是次仿紧空间 (见命题 3.4.14), 矛盾. 故 X 不是 $\aleph$ 空间.

这说明引理 2.8.9, 推论 2.8.11 中 k 空间的条件不可省去. Sakai[345] 构造了一个所有紧集是有限集的局部可数的正则空间 X, 使 X 不是可数亚紧空间. 这空间具有局部可数 k 网, 但不是 perfect 空间.

2.9　π　映　象

在上两节中介绍了具有可分纤维的一些映射. 本节转入讨论与具有紧纤维的映射紧密相关的 π 映射, 其目的在于发展弱展开的概念, 探讨度量空间的商 π 映象、伪开 π 映象和开 π 映象的特征, 将满足弱 Cauchy 条件的对称度量空间、半度量空间表为度量空间在这些映射下的象.

定义 2.9.1[333]　设 (X,d) 是度量空间. $f:X\to Y$ 称为 π 映射, 如果对 $y\in U\in\tau(Y)$ 有 $d(f^{-1}(y),X-f^{-1}(U))>0$.

显然, 定义于度量空间上的紧映射是 π 映射. 对空间 X, 让 M 是集合 X 赋予离散拓扑的空间. 则 $\mathrm{id}_M:M\to X$ 是紧映射, 所以每一空间是某一度量空间的 π 映象. 因而讨论度量空间的 π 映象须附加一定的条件.

定义 2.9.2[249]　X 的覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的点星网, 若对 $x\in X$, $\{\mathrm{st}\,(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网. 设 Φ 是一集族性质. 若 X 的点星网 $\{\mathscr{U}_n\}$ 中的每一 $\mathscr{U}_n$ 具有 Φ, 则称 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 Φ 点星网.

点星网是弱展开的推广. 弱展开可称为点星弱基. 类似可定义点星序列邻域网.

定义 2.9.3　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cfp 覆盖 [405], 若 $K\in\mathscr{K}(X)$, 存在 $\mathscr{F}\in\mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $\mathscr{F}$ 被 K 的有限闭覆盖精确加细;

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 wcs 覆盖 [133], 若 S 是 X 中收敛于 x 的序列, 存在 $\mathscr{P}' \in (\mathscr{P})_x^{<\omega}$, 使 S 是终于 $\cup\mathscr{P}'$;

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs^* 覆盖 [215], 若 S 是 X 中收敛于 x 的序列, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 S 的某子列是终于 P.

易验证, 对空间 X, 开覆盖 $\Rightarrow$ cfp 覆盖 $\Rightarrow$ wcs 覆盖 $\Rightarrow$ cs^* 覆盖.

引理 2.9.4 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的 wcs 覆盖. 若 $S \in \mathscr{S}(X)$, 则存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $\mathscr{F}$ 被 S 的有限闭覆盖精确加细.

证明 设序列 S 收敛于 $x \in X$. 则存在 $\mathscr{P}' \in (\mathscr{P})_x^{<\omega}$, 使 S 是终于 $\cup\mathscr{P}'$. 由于 $S - \cup\mathscr{P}'$ 是有限集且对 $P \in \mathscr{P}'$, $P \cap S$ 是闭集, 所以存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $\mathscr{F}$ 被 S 的有限闭覆盖精确加细.

命题 2.9.5 设映射 $f: X \to Y$, 其中 (X,d) 是度量空间. 对 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\mathscr{U}_n = \{f(\mathrm{B}(x,1/n)) : x \in X\}$.

(1) 若 f 是 π 映射, 则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 Y 的点星网 [251];

(2) 若 f 是紧覆盖映射, 则 $\mathscr{U}_n$ 是 Y 的 cfp 覆盖 [249];

(3) 若 f 是序列覆盖映射, 则 $\mathscr{U}_n$ 是 Y 的 wcs 覆盖 [133];

(4) 若 f 是序列商映射, 则 $\mathscr{U}_n$ 是 Y 的 cs^* 覆盖 [251].

证明 (1) 对 $y \in U \in \tau(Y)$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $d(f^{-1}(y), X - f^{-1}(U)) \geqslant 1/n$. 取 $m = 2n$. 若 $y \in f(\mathrm{B}(x,1/m))$, 那么 $f^{-1}(y) \cap \mathrm{B}(x,1/m) \neq \varnothing$. 如果 $\mathrm{B}(x,1/m) \not\subset f^{-1}(U)$, 则 $d(f^{-1}(y), X - f^{-1}(U)) < 2/m = 1/n$, 矛盾. 因此 $\mathrm{B}(x,1/m) \subset f^{-1}(U)$, 从而 $f(\mathrm{B}(x,1/m)) \subset U$, 所以 $\mathrm{st}(y, \mathscr{U}_m) \subset U$. 故 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 Y 的点星网.

(2) 对 $K \in \mathscr{K}(Y)$, 存在 $L \in \mathscr{K}(X)$, 使 $f(L) = K$, 从而存在 $\{\mathrm{B}(x,1/n)\}_{x \in X}$ 的有限集 $\mathscr{F}$, 使 $\mathscr{F}$ 被 L 的有限闭覆盖 $\mathscr{L}$ 精确加细, 那么 $\mathscr{U}_n$ 的有限集 $f(\mathscr{F})$ 被 K 的有限闭覆盖 $f(\mathscr{L})$ 精确加细. 从而 $\mathscr{U}_n$ 是 Y 的 cfp 覆盖.

(3) 设 S 是 Y 中收敛于 y 的序列. 存在 $L \in \mathscr{K}(X)$, 使 $f(L) = S \cup \{y\}$, 于是存在 X 的有限集 F, 使 $f^{-1}(y) \cap L \subset \bigcup_{x \in F} \mathrm{B}(x,1/n)$. 则 $\mathscr{U} = \{f(\mathrm{B}(x,1/n))\}_{x \in F}$ 是 $\mathscr{U}_n$ 的有限集且 S 是终于 $\cup\mathscr{U}$ 的. 否则, 存在 S 的子列 $\{y_k\} \subset Y - \cup\mathscr{U}$. 对 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $x_k \in L - \bigcup_{x \in F} \mathrm{B}(x,1/n)$, 使 $f(x_k) = y_k$. 设 a 是 $\{x_k\}$ 的聚点. 则 $a \notin \bigcup_{x \in F} \mathrm{B}(x,1/n)$, 于是 $f(a) \neq y$, 矛盾.

(4) 若 f 是序列商映射, 易验证, $\mathscr{U}_n$ 是 Y 的 cs^* 覆盖.

命题 2.9.6 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是空间 X 的点星网. 那么存在度量空间 (M,d) 和 π 映射 $f: M \to X$ 具有性质:

(1) 若 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的开覆盖列, 则 f 是开映射 [153];

(2) 若 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 cfp 覆盖列, 则 f 是紧覆盖映射 [250];

(3) 若 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wcs 覆盖列, 则 f 是序列覆盖映射 [133];

(4) 若 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 cs^* 覆盖列, 则 f 是序列商映射 [251];

(5) 若 $E \subset X$ 且每一 $(\mathscr{U}_n)_E$ 是可数的, 则 $f^{-1}(E)$ 具有可数基.

证明 容易验证, 对 $x \in X$, 如果 $x \in U_i \in \mathscr{U}_i (\forall i \in \mathbb{N})$, 那么 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 的网. 对 $i \in \mathbb{N}$, 记 $\mathscr{U}_i = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_i}$, 并且 Λ_i 是赋予离散拓扑的空间. 置

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i : \{U_{\alpha_i}\} \text{ 是 } X \text{ 中某点 } x(\alpha) \text{ 的网 }\}.$$

则 M 是可度量空间, 并且这度量拓扑与如下定义的 M 的距离函数 d 是相容的: 对 $\alpha, \beta \in M$, 定义

$$d(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta, \\ \max\{1/k : \pi_k(\alpha) \neq \pi_k(\beta), k \in \mathbb{N}\}, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

令 $f : M \to X$ 为 $f(\alpha) = x(\alpha)$. 则 f 是映射. 对 $x \in U \in \tau(X)$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U$. 对 $\alpha \in f^{-1}(x), \beta \in M$, 若 $d(\alpha,\beta) < 1/n$, 那么当 $i \leqslant n$ 时, $\pi_i(\alpha) = \pi_i(\beta)$, 于是 $x \in U_{\pi_n(\alpha)} = U_{\pi_n(\beta)}$, 从而 $f(\beta) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_{\pi_i(\beta)} \subset U_{\pi_n(\beta)} \subset U$, 因此 $d(f^{-1}(x), M - f^{-1}(U)) \geqslant 1/n$. 故 f 是 π 映射.

(1) 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的开覆盖列. 对 $n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \Lambda_i (\forall i \leqslant n)$, 有

$$f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = \cap\{U_{\alpha_i} : i \leqslant n\},$$

其中 $B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \{\beta \in M : \pi_i(\beta) = \alpha_i, i \leqslant n\}$. 于是 f 是开映射.

(2) 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 cfp 覆盖列. 对 $K \in \mathscr{K}(X), n \in \mathbb{N}$, 存在 $\mathscr{P}'_n \in \mathscr{P}_n^{<\omega}$, 使 $\mathscr{P}'_n = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_n}$ 被 K 的闭覆盖 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_n}$ 精确加细, 其中 $\Gamma_n \subset \Lambda_n$. 不妨设 K_α 是非空的. 置 $L = \{(\alpha_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_{\alpha_n} \neq \varnothing\}$. 类似命题 2.7.1(1) 的证明, L 是 M 的紧集且 $f(L) = K$. 故 f 是紧覆盖映射.

(3) 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wcs 覆盖列. 对 $S \in \mathscr{S}(X)$, 由引理 2.9.4 及 (2) 的说明, 存在 M 的紧集 L, 使 $f(L) = S$. 故 f 是序列覆盖映射.

(4) 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 cs^* 覆盖列, $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x_0 的非平凡序列. 由于 $\mathscr{U}_1$ 是 X 的 cs^* 覆盖, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 T_1 和 $\alpha_1 \in \Lambda_1$, 使 T_1 是终于 U_{α_1} 的. 由归纳法, 对 $i \in \mathbb{N}$, 可选取序列 T_i 和 $\alpha_i \in \Lambda_i$, 使 T_{i+1} 是 T_i 的子列且 T_i 是终于 U_{α_i} 的, 于是 $T_i \subset \bigcap_{k\leqslant i} U_{\alpha_k}$. 取定 $x_{n_i} \in T_i$ 和 $\beta_i \in f^{-1}(x_{n_i})$, 使 $n_i < n_{i+1}$ 且当 $k \leqslant i$ 时, $\pi_k(\beta_i) = \alpha_k$. 那么 $\lim_{i\to\infty} \pi_k(\beta_i) = \alpha_k$. 令 $\beta_0 = (\alpha_i)$. 则在 M 中序列 $\{\beta_i\}$ 收敛于 β_0. 故 f 是序列商映射.

由 f 的定义, (5) 成立.

定理 2.9.7 下述条件等价:

(1) X 是可展空间;

(2) X 是度量空间的紧覆盖的开 π 映象 [253];

(3) X 是度量空间的开 π 映象 [153].

定义 2.9.8[23]　称对称度量空间 (X,d) 满足弱 Cauchy 条件, 如果 $\{x_n\}$ 是 X 的收敛序列, 则存在 Cauchy 子列 $\{x_{n_i}\}$, 即对 $\varepsilon>0$, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使当 $i,j>k$ 时, $d(x_{n_i},x_{n_j})<\varepsilon$.

易验证, 对对称度量空间 (X,d), 若 $\{x_n\}$ 是 X 的收敛序列, 那么 $\{x_n\}$ 有子列是 Cauchy 序列当且仅当对 $\varepsilon>0$, 存在子列 $\{x_{n_i}\}$, 使所有的 $d(x_{n_i},x_{n_j})<\varepsilon$.

引理 2.9.9[67, 377]　设 (X,d) 是对称度量空间. d 满足弱 Cauchy 条件当且仅当对 $F\subset X$, 若 F 不是 X 的闭集, 则对 $\varepsilon>0$, 存在 $x\neq y\in F$, 使 $d(x,y)<\varepsilon$. 上述条件等价于 X 是具有 cs^* 覆盖点星网的序列空间.

证明　(9.1) 设 (X,d) 是满足弱 Cauchy 条件的对称度量空间. 由命题 1.6.16, X 是序列空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n=\{A\subset X:\mathrm{diam}A<1/n\}$. 则对 $x\in X$ 有 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\mathrm{B}(x,1/n)$. 从而 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的点星网. 对 $n\in\mathbb{N}$ 及 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_k\}$, 存在 Cauchy 子列 $\{x_{k_i}\}$ ，使所有的 $d(x,x_{k_i})<1/(n+1)$, 于是存在 $m\in\mathbb{N}$, 使当 $i,j\geqslant m$ 时, $d(x_{k_i},x_{k_j})<1/(n+1)$. 令 $A_n=\{x\}\cup\{x_{k_i}:i\geqslant m\}$. 那么 $A_n\in\mathscr{U}_n$. 从而 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的 cs^* 覆盖.

(9.2) 让 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是序列空间 X 的 cs^* 覆盖点星网, 不妨设 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $x\in X,n\in\mathbb{N}$, 先证明 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 是 x 的序列邻域. 若不然, 则存在 $X-\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 的序列 $\{x_m\}$ 收敛于 x, 从而存在子列 $\{x_{m_i}\}$ 终于某一 $U\in\mathscr{U}_n$, 于是 $x_{m_i}\in U\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 矛盾. 因为 X 是序列空间, 所以 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的弱基. 由命题 1.6.14 的充分性, 存在 X 的对称度量 d, 使对 $x\in X,n\in\mathbb{N}$ 有 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\mathrm{B}(x,1/2^n)$. 对 $F\subset X,\varepsilon>0$, 取 $m\in\mathbb{N}$, 使 $1/2^m<\varepsilon$. 若 F 不是 X 的闭集, 存在 F 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\notin F$, 于是存在 $U\in\mathscr{U}_m$, 使 $\{x_n\}$ 的某子列是终于 U 的, 从而有 $x\neq y\in F$, 使 $d(x,y)<1/2^m<\varepsilon$.

(9.3) 设对称度量空间 (X,d) 满足: 对 $F\subset X$, 若 F 不是 X 的闭集, 则对 $\varepsilon>0$, 存在 $x\neq y\in F$, 使 $d(x,y)<\varepsilon$. 对 $\varepsilon>0$ 及 X 中收敛于 x 的非平凡序列 $\{x_n\}$, 若对 $\{x_n\}$ 的每一子列 $\{y_n\}$, 存在子列 $\{z_n\}$, 使当 $n>1$ 时, $d(z_1,z_n)\geqslant\varepsilon$, 则存在子列 $\{a_n\}$, 使当 $n\neq m$ 时, $d(a_n,a_m)\geqslant\varepsilon$, 矛盾. 因而存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{y_n\}$, 使对 $\{y_n\}$ 的每一子列 $\{z_n\}$ 有 $d(z_1,z_n)<\varepsilon$. 由此可构造 $\{x_n\}$ 的子列 $\{a_n\}$, 使 $d(a_n,a_m)<\varepsilon$. 这表明 $\{x_n\}$ 存在 Cauchy 子列.

定理 2.9.10[204]　X 是度量空间的商 π 映象当且仅当 X 是满足弱 Cauchy 条件的对称度量空间.

证明　利用引理 2.9.9 和映射引理，由命题 2.9.6 得充分性, 由命题 2.9.5 得必要性.

定理 2.9.11[404]　X 是度量空间的紧覆盖的商 π 映象当且仅当 X 存在 cfp 覆盖的弱展开.

证明　由命题 2.9.6 和映射引理得充分性, 由命题 2.9.5 得必要性.

例 2.9.12[204]　存在不满足弱 Cauchy 条件的对称度量空间.

取 $X=\mathbb{R}$. 定义 X 的对称距离 d 如下: 对 $x,y\in X$,

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x,y\in\mathbb{P}\text{ 且 }x\neq y,\\ |x-y|, & \text{其它}.\end{cases}$$

X 赋予由 d 生成的对称度量拓扑. 对 $x\in X, n\in\mathbb{N}$, 有

$$\mathrm{B}(x,1/n)=\begin{cases}(x-1/n,x+1/n), & x\in\mathbb{Q},\\ \{x\}\cup((x-1/n,x+1/n)-\mathbb{P}), & x\in\mathbb{P}.\end{cases}$$

于是

(12.1) 子空间 $\mathbb{P}$ 的收敛序列都是平凡的.

(12.2) 对 $x\in\mathbb{Q}, A\subset X$, 若 x 是 A 在 $\mathbb{R}$ 中关于欧氏拓扑 τ^* 的聚点, 那么 x 也是 A 在 X 的聚点.

对 $n\in\mathbb{N}$ 及 X 的对称度量 ρ, 置

$$D_n=\{x\in\mathbb{P}:\rho(x,\mathbb{P}-\{x\})\geqslant 1/n\}.$$

若存在 $x\in\mathbb{P}-\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$, 那么对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in\mathbb{P}-\{x\}$, 使 $\rho(x,x_n)<2/n$, 于是 $x_n\to x\in\mathbb{P}$, 这与 (12.1) 矛盾. 从而 $\mathbb{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$. 由 $(\mathbb{R},\tau^*)$ 的第二范畴性质, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{int}_{\tau^*}(\mathrm{cl}_{\tau^*}(D_m))\neq\varnothing$. 取 $x\in\mathbb{Q}\cap(\mathrm{cl}_{\tau^*}(D_m))$. 由 (12.2), $x\in\mathbb{Q}\cap\overline{D}_m$, 所以 D_m 不是 X 的闭集. 由引理 2.9.9, (X,ρ) 不满足弱 Cauchy 条件.

对上述 X, 由定理 2.3.6, 存在度量空间 M 和商映射 $f:M\to X$. 由定理 2.9.10, f 关于 M 上任一相容的度量不是 π 映射. 对半度量空间, 情况发生了变化.

引理 2.9.13[67]　任一半度量空间存在满足弱 Cauchy 条件的相容的半度量.

证明　设 (X,d) 是半度量空间. 对 $r\in\mathbb{R}^+$，定义

$$\mathscr{B}(r)=\{B\subset X:\text{ 对 }x\neq y\in B\text{ 有 }d(x,y)\geqslant r\}.$$

对 $x,y\in X$, 定义

$$A(x,y)=\{z\in X:\text{ 存在 }B\in\mathscr{B}(d(x,y)/2),\text{ 使 }x,y\in B\text{ 且 }z\in\overline{B}\},$$
$$\rho(x,y)=\inf\{d(x,z)+d(z,y):z\in A(x,y)\}.$$

(13.1) ρ 是 X 的半度量.

显然, ρ 是 X 的对称距离, 并且对 $x,y\in X$ 有 $\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$, 于是对 $x\in X,\varepsilon>0$ 有 $\mathrm{B}_d(x,\varepsilon)\subset\mathrm{B}_\rho(x,\varepsilon)$. 如果存在 X 的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n\in\mathrm{B}_\rho(x,1/n)-\mathrm{B}_d(x,\varepsilon)$, 让 $\varepsilon_n=d(x,x_n)$, 那么 $\varepsilon_n\geqslant\varepsilon$. 由于 $\rho(x,x_n)<1/n$, 存在 $y_n\in A(x,x_n)$, 使 $d(x,y_n)+d(y_n,x_n)<1/n$, 于是存在 $B_n\in\mathscr{B}(\varepsilon_n/2)$, 使 $x,x_n\in B_n$, $y_n\in\overline{B}_n$

且 $d(x,y_n) < 1/n$. 选取 B_n 的序列 $\{y_{ni}\}_i$ 收敛于 y_n. 于是存在 $n,i \in \mathbb{N}$, 使 $y_{ni} \in B_d(x,\varepsilon/2)$, 即 $d(x,y_{ni}) < \varepsilon/2$. 由于 $y_{ni} \in B_n \in \mathscr{B}(\varepsilon_n/2)$ 且 $x \in B_n$, 所以 $d(x,y_{ni}) \geqslant \varepsilon_n/2 \geqslant \varepsilon/2$, 矛盾. 因此, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{B}_\rho(x,1/n) \subset \mathrm{B}_d(x,\varepsilon)$. 故 ρ 是 X 的半度量.

(13.2) (X,ρ) 满足弱 Cauchy 条件.

对 $\varepsilon > 0, F \subset X$, 若 $F \notin \tau^c(X)$, 取 $z \in \overline{F} - F$, 并且定义 $B = F \cap \mathrm{B}_d(z,\varepsilon/2)$, $\varepsilon_1 = \inf\{d(x,y)+\varepsilon : x \neq y \in B\}$. 那么 $B \in \mathscr{B}(\varepsilon_1)$ 且 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon$. 选取 $x,y \in B$, 使 $0 < d(x,y) < 2\varepsilon_1$. 则 $B \in \mathscr{B}(d(x,y)/2)$ 且 $z \in \overline{B}$, 于是 $z \in A(x,y)$. 因此 $\rho(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y) < \varepsilon$. 由引理 2.9.9, (X,ρ) 满足弱 Cauchy 条件.

例 2.9.14[67] 存在半度量空间 (X,d), 使 d 不满足弱 Cauchy 条件.

设 $X = A \cup B$, 其中 $A = \{(0,a) \in \mathbb{R}^2 : |a| \leqslant 1\}$, $B = \{(b,\sin(1/b)) : 0 < b \leqslant 1\}$. X 赋予欧氏拓扑. 定义 X 的对称距离 d 如下: 对 $x,y \in X$, 记 $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$. 如果 $x \in A$ 或 $y \in A$, 让 $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$; 如果 $x,y \in B$, 让 $d(x,y)$ 是 x 与 y 在 B 中弧的长度. 那么 d 是与 X 的拓扑相容的半度量. 因为 B 的任一 Cauchy 序列均不收敛于 A 的点, 所以对 B 中任一收敛于 A 的点的序列, 这序列不存在关于 d 的 Cauchy 子列, 即 d 不满足弱 Cauchy 条件.

定理 2.9.15[1, 67] 下述条件等价:

(1) X 是半度量空间;

(2) X 是度量空间的可数双商 π 映象;

(3) X 是度量空间的伪开 π 映象.

证明 由引理 2.9.13, 定理 2.9.10 和映射引理得 (1) $\Rightarrow$ (2). (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 由定理 2.9.10 和 1.2.7 得 (3) $\Rightarrow$ (1).

推论 2.9.16 闭 π 映射保持可度量性.

问题 2.9.17 (1) 半度量空间是否是某一度量空间的序列覆盖的 π 映象?

(2) 半度量空间是否是某一度量空间的紧覆盖的 π 映象?

例 2.9.18[240] 存在度量空间 (X,d) 和可数双商的 π 映射 $f : (X,d) \to \mathbb{S}_1$, 使 f 不是序列覆盖映射.

设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{N}$ 的极大几乎互不相交族 (例 1.8.4). 记不可数族 $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. 对 $\alpha \in \Gamma$, 置 $B_\alpha = \{\alpha\} \cup A_\alpha$. 在 B_α 上定义对称距离 d_α 如下: 对 $x,y \in B_\alpha$,

$$d_\alpha(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1/y, & x \neq y, x = \alpha, \\ |1/x - 1/y|, & x \neq y, x \neq \alpha, y \neq \alpha. \end{cases}$$

那么 (B_α, d_α) 是度量空间. 令 $X = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$, 且让 d 是 X 上标准的拓扑和度量.

定义函数 $f: X \to \mathbb{S}_1$ 满足:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma, \\ 1/x, & x \notin \Gamma. \end{cases}$$

(18.1) f 是连续的. 对 $y \in \mathbb{S}_1 - \{0\}$, $f^{-1}(y) = \oplus\{1/y : 1/y \in A_\alpha\}$ 是 X 的开闭集. 如果 U 是 0 在 $\mathbb{S}_1$ 的邻域, 对 $\alpha \in \Gamma$, $f^{-1}(U) \cap B_\alpha$ 是 B_α 的开集, 所以 $f^{-1}(U) \in \tau(X)$.

(18.2) f 是可数双商映射. 由映射引理, 只须证 f 是商映射. 设 $U \subset \mathbb{S}_1$ 且 $f^{-1}(U) \in \tau(X)$. 对 $y \in U$, 不妨设 $y = 0$. 如果 U 不是 y 的邻域, 则存在 $\mathbb{N}$ 的无限集 M, 使对 $n \in M$ 有 $1/n \notin U$. 如果 $M \in \mathscr{A}$, 则存在 $\alpha \in \Gamma$, 使 $B_\alpha = \{\alpha\} \cup M$. 因为 $f^{-1}(U)$ 是 α 的邻域, 序列 B_α 是终于 $f^{-1}(U)$ 的, 从而序列 $\{1/n\}_{n\in M}$ 是终于 U 的, 矛盾. 因此, $M \notin \mathscr{A}$, 那么存在 $\alpha \in \Gamma$, 使 $M \cap A_\alpha$ 是无限集, 于是序列 $\{x : x \in M \cap A_\alpha\}$ 是终于 $f^{-1}(U)$ 的, 矛盾. 从而, U 是 y 的邻域. 故 f 是商映射.

(18.3) f 是 π 映射. 否则, 存在 $z \in \mathbb{S}_1$ 和 z 的开邻域 U, 使 $d(f^{-1}(z), X - f^{-1}(U)) = 0$. 则存在 X 的序列 $\{z_n\}$ 和 $\{x_n\}$, 使 $z_n \in f^{-1}(z), x_n \in X - f^{-1}(U)$ 且 $d(z_n, x_n) < 1/n$. 那么每一 $f(z_n) = z$ 且 $f(x_n) \notin U$. 从而存在 $\alpha_n \in \Gamma$, 使 $x_n, z_n \in B_{\alpha_n}$, 且 $d_{\alpha_n}(z_n, x_n) < 1/n$, 于是 $|f(z_n) - f(x_n)| < 1/n$, 故 $f(x_n) \to z$, 矛盾.

(18.4) f 不是序列覆盖映射. 否则, 存在 X 的紧集 K, 使 $f(K) = \mathbb{S}_1$. 由 K 的紧性, 存在 $\Gamma' \in \Gamma^{<\omega}$, 使 $K \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma'} B_\alpha$. 取定 $\beta \in \Gamma - \Gamma'$. 则存在 $n_0 \in A_\beta - (\bigcup_{\alpha\in\Gamma'} A_\alpha) \subset A_\beta - K$. 于是不存在 $x_0 \in K$, 使 $f(x_0) = 1/n_0$, 矛盾.

2.10 紧　映　象

本节在度量空间的 π 映射的基础上, 探讨度量空间的商紧映象、伪开紧映象和开紧映象的特征, 将可展空间、亚紧可展空间表为度量空间在这些映射下的象.

定理 2.10.1[240]　度量空间上的序列商的紧映射是序列覆盖映射.

证明　设 $f: X \to Y$ 是序列商的紧映射, 其中 X 是度量空间. 让 $\{y_n\}$ 是 Y 中收敛于 y_0 的非平凡序列. 记 $S_1 = \{y_0\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, $X_1 = f^{-1}(S_1), g = f_{|X_1}$. 则 g 是序列商的紧映射. 由映射引理, g 是伪开映射. 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是紧集 $g^{-1}(y_0)$ 在度量空间 X_1 中递减的邻域基. 对 $n \in \mathbb{N}$, $y_0 \in g(U_n)^\circ$, 存在 $i_n \in \mathbb{N}$, 使当 $i \geqslant i_n$

时, $y_i \in g(U_n)$, 于是 $g^{-1}(y_i) \cap U_n \neq \varnothing$. 不妨设 $1 < i_n < i_{n+1}$. 对 $j \in \mathbb{N}$, 取定

$$x_j \in \begin{cases} f^{-1}(y_j), & j < i_1, \\ f^{-1}(y_j) \cap U_n, & i_n \leqslant j < i_{n+1}. \end{cases}$$

让 $K = g^{-1}(y_0) \cup \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$. 则 K 是 X_1 的紧集且 $g(K) = S_1$, 从而 $f(K) = S_1$. 故, f 是序列覆盖映射.

推论 2.10.2[240] 度量空间上的商紧映射是序列覆盖映射.

例 2.10.3[288] 可分度量空间到紧度量空间的可数双商紧映射未必是紧覆盖映射.

设 $Z = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$. 置 $\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{K}(Z) : \pi_1(A) = \mathbb{I}\}$. 那么 $|\mathscr{A}| = 2^{\aleph_0}$, 于是存在一对一的满函数 $\mu : \mathbb{I} \to \mathscr{A}$. 若 $s \in \mathbb{I}$, 那么 $s \in \pi_1\mu(s)$, 于是 $\mu(s) \cap \pi_1^{-1}(s) \neq \varnothing$. 取定 $x_s \in \mu(s) \cap \pi_1^{-1}(s)$. 令 O_s 是 $\{s\} \times \mathbb{I}$ 中含点 x_s 的长度为 1/4 的开区间. 再令 $X = \{(s,t) \in Z : (s,t) \notin O_s\}$. 则 X 是可分度量空间. 定义 $f = \pi_{1|X}$. 则 $f : X \to \mathbb{I}$ 是紧映射.

(3.1) f 不是紧覆盖映射. 若不然, 存在 X 的紧集 B, 使 $f(B) = \mathbb{I}$. 那么 $B \in \mathscr{A}$, 所以存在 $s \in \mathbb{I}$, 使 $B = \mu(s)$, 从而 $x_s \in \mu(s) - X$, 于是 $B \not\subset X$, 矛盾.

(3.2) f 是可数双商映射. 由收敛引理, 只须证 f 是序列覆盖映射. 设 $\mathbb{I}$ 的序列 $\{s_n\}$ 收敛于 s_0. 取定 $f^{-1}(s_0)$ 中的两点 $(s_0, t_1), (s_0, t_2)$, 使 $|t_1 - t_2| = 1/2$. 让 $K = \{s_i : i \in \omega\}$, $C = f^{-1}(K) \cap (K \times \{t_1, t_2\})$. 则 C 是 X 的紧集且 $f(C) = K$. 故 f 是序列覆盖映射.

定义 2.10.4 空间 X 的覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的点有限弱展开[181] (点有限半展开[1], 点有限展开), 若 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的弱展开 (半展开, 展开) 并且 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的点有限覆盖.

引理 2.10.5[239] 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是空间 X 的点有限覆盖列. 若 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$, 则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 cs^* 覆盖的点星网当且仅当 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的点星序列邻域网.

证明 由引理 2.9.9 的 (9.2), 若 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 cs^* 覆盖的点星网, 则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的点星序列邻域网. 反之, 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的点星序列邻域网. 对 $n \in \mathbb{N}$ 及 X 中收敛于 x 的非平凡序列 $\{x_k\}$. 若 $m \leqslant n$ 且 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \neq \{x\}$, 取 $z_m \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) - \{x\}$. 于是存在 $i \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_i) \subset X - \{z_m : m \leqslant n \text{ 且 } \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \neq \{x\}\}$. 因为 $\{x_k\}$ 是终于 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_i)$ 的, 所以 $i > n$, 从而 $\{x_k\}$ 是终于 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 的. 由于 $\mathscr{U}_n$ 是点有限的, 所以存在 $\{x_k\}$ 的子列是终于 $\mathscr{U}_n$ 的某元. 故 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的 cs^* 覆盖.

定理 2.10.6 下述条件等价:

(1) X 具有点有限弱展开;

(2) X 是度量空间的序列商的商紧映象[403];

(3) X 是度量空间的商紧映象 [181, 228];

(4) X 是度量空间的序列覆盖的商紧映象 [403].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的点有限弱展开. 对 $i\in\mathbb{N}$, 记 $\mathscr{U}_i=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_i}$. 采用命题 2.9.6 的记号, 可定义度量空间 M 和映射 $f:(M,d)\to X$. 对 $x\in X, i\in\mathbb{N}$, 置 $\Gamma_i=\{\alpha\in\Lambda_i: x\in U_\alpha\}$. 那么 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i$ 的紧集. 如果 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 那么 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U_{\alpha_i}$, 于是 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 故 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\subset f^{-1}(x)$. 如果 $\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$, 那么 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U_{\alpha_i}$, 于是 $\alpha\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 故 $f^{-1}(x)\subset\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$. 因此 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$. 即, f 是紧映射. 再由引理 2.10.5 和命题 2.9.6, f 是序列商映射.

由映射引理得 (2) $\Leftrightarrow$ (3). 由推论 2.10.2 得 (3) $\Leftrightarrow$ (4). 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 是度量空间 M 在商紧映射 f 下的象. 由定理 1.3.5, M 存在局部有限开覆盖列 $\{\mathscr{B}_i\}$, 使 $\mathscr{B}_{i+1}$ 加细 $\mathscr{B}_i$, 且对 $K\in\mathscr{K}(M)$, $\{\mathrm{st}(K,\mathscr{B}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 M 中的邻域基. 令 $\mathscr{U}_i=f(\mathscr{B}_i)$. 那么 $\mathscr{U}_i$ 是 X 的点有限覆盖. 下面证明 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 的弱展开. 若 $x\in U\in\tau(X)$, 那么存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(f^{-1}(x),\mathscr{B}_n)\subset f^{-1}(U)$, 从而 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$. 另一方面, 若 X 的子集 U 满足: 对 $x\in U$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$, 那么对 $z\in f^{-1}(U)$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(f(z),\mathscr{U}_n)\subset U$, 于是 $\mathrm{st}(z,\mathscr{B}_n)\subset f^{-1}(U)$, 从而 $f^{-1}(U)\in\tau(M)$, 因此 $U\in\tau(X)$. 故 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 的点有限弱展开.

推论 2.10.7 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是可分度量空间的 (紧覆盖的) 商紧映象;

(2) X 是可分度量空间的商 π 映象;

(3) X 是 g 第二可数空间.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的. 由推论 2.8.11, 定理 2.9.10 和 1.6.22 得 (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数弱基. 不妨设 $\mathscr{B}\subset\tau^c(X)$. 记 $\mathscr{B}=\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{B}_x$, 其中 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的弱基. 对 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$C_i=\{x\in X: B_i\notin\mathscr{B}_x\},\ \mathscr{U}_i=\{B_i,C_i\}.$$

则 $\mathscr{U}_i$ 是 X 的 cfp 覆盖. 事实上, 设 $K\in\mathscr{K}(X)$, 置 $K_1=B_i\cap K, K_2=\overline{K-B_i}$. 那么 $K_1\subset B_i$ 且 $K=K_1\cup K_2$. 如果 $x\in K_2$, 由于 K 是可度量的, 所以存在 $K-B_i$ 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in K$, 于是 $B_i\notin\mathscr{B}_x$, 从而 $x\in C_i$. 所以 $K_2\subset C_i$. 若 $x\in X$, 则

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_i)=\begin{cases} B_i, & B_i\in\mathscr{B}_x,\\ X, & B_i\notin\mathscr{B}_x, x\in B_i,\\ C_i, & B_i\notin\mathscr{B}_x, x\notin B_i.\end{cases}$$

于是 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 的弱基. 这表明 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 的弱展开. 由命题 2.9.6 和定理 2.10.6, X 是可分度量空间的紧覆盖的商紧映象.

推论 2.10.8 考虑下述条件:

(1) X 是度量空间的 (紧覆盖的) 商紧 ss 映象;

(2) X 是度量空间的商 π-ss 映象;

(3) X 具有局部可数弱基;

(4) X 是 g 第二可数空间的拓扑和;

(5) X 是具有局部可数 cs^* 网的 g 第一可数空间;

(6) X 是具有局部可数 k 网的 g 第一可数空间.

那么 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6). 若更设 X 是正则空间, 则 (6) $\Rightarrow$ (1).

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的. 由推论 2.8.11 和定理 2.9.10 得 (2) $\Rightarrow$ (5). 由推论 2.8.11 和命题 1.6.21 得 (5) $\Rightarrow$ (3). 由推论 2.8.11 得 (3) $\Rightarrow$ (4). (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) 是显然的. 当 X 是正则空间时, 由推论 2.8.11 和 2.10.7 得 (6) $\Rightarrow$ (1).

例 2.8.14 说明上述推论中假设正则性是重要的.

例 2.10.9 $\mathbb{R}$ 的点无理扩张拓扑空间 X (例 2.7.14): X 不是度量空间的商 π 映象[239].

采用例 2.7.14 的记号. 先证明 (X,τ) 不是可数亚紧空间. 记 X 的欧氏拓扑为 τ^*, $\mathbb{Q}=\{r_n : n\in\mathbb{N}\}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $F_n=\{r_i : i\geqslant n\}$. 因为 $\mathbb{Q}$ 是 X 的闭离散集, $\{F_n\}$ 是 X 的递减的闭集列且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\varnothing$. 若 X 是可数亚紧空间, 则存在 X 的开集列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 满足 $F_n\subset G_n$ 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n=\varnothing$ (见附录 A 命题 2.8). 对 $n\in\mathbb{N}, x\in F_n$, 存在 $U_{nx}\in\tau^*$, 使 $x\in U_{nx}, U_{nx}\cap\{r_i : i<n\}=\varnothing$ 且 $\{x\}\cup(\mathbb{P}\cap U_{nx})\subset G_n$, 于是 $U_{nx}=(U_{nx}\cap\mathbb{Q})\cup(U_{nx}\cap\mathbb{P})\subset G_n$, 从而有 $O_n\in\tau^*$, 使 $F_n\subset O_n\subset G_n$. 因此 O_n 是 $(\mathbb{R},\tau^*)$ 的开稠集且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n=\varnothing$, 这与 τ^* 是 Baire 拓扑相矛盾. 所以 X 不是可数亚紧空间, 于是 X 也不是次仿紧空间 (见附录 A 命题 4.11).

如果 X 是度量空间的商 π 映象, 由映射引理及定理 2.9.15, X 是半度量空间, 从而 X 是次仿紧空间, 矛盾.

问题 2.10.10 可分度量空间的商 π 映象是否是某一可分度量空间的商紧映象?

问题 2.10.11[173] 具有 σ 点有限 cs 网的对称度量空间是否是度量空间的商紧映象?

引理 2.10.12[1] 下述条件等价:

(1) X 具有点有限展开;

(2) X 具有点有限半展开;

(3) X 是具有点有限弱展开的 Fréchet 空间;

(4) X 是亚紧的可展空间.

证明　(4) ⇒ (1) ⇒ (3) 是显然的. 由命题 1.6.17 得 (3) ⇒ (2). 下面证明 (2) ⇒ (4). 设 X 具有点有限半展开. 由定理 2.10.6 和映射引理, X 是度量空间的可数双商紧映象, 于是 X 是亚紧空间 (见附录 A 推论 2.7). 又由定理 2.7.17, 2.9.15 和 1.2.11, X 是可展空间.

由此及命题 2.9.6 和定理 2.10.6, 得到度量空间开紧映象的特征.

定理 2.10.13[18, 26]　下述条件等价:

(1) X 是度量空间的 (紧覆盖的) 开紧映象;

(2) X 是度量空间的伪开紧映象;

(3) X 是亚紧的可展空间.

Michael[277] 证明了度量空间上的开紧映射自身是紧覆盖映射. 例 2.10.3 说明开映射不可减弱为可数双商映射.

例 2.10.14　Michael 直线 (例 1.8.5): 亚紧可展空间的开紧映象 [48].

采用例 1.8.5 的记号, 其中 X, B 分别是 Michael 直线和 Bernstein 集. 置

$$\begin{aligned}
&H = (\mathbb{I} \times \{0\}) \cup (B \times \mathbb{N});\\
&V(x, m) = \{x\} \times (\{0\} \cup \{n : n \geqslant m\}), x \in \mathbb{I}, m \in \mathbb{N};\\
&W(J, m) = ((J \cap (\mathbb{I} - B)) \times \{0\}) \cup\\
&\qquad\qquad ((J \cap B) \times \{n : n \geqslant m\}), J \subset \mathbb{I}, m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

H 赋予下述拓扑: 基元形如 $V(x, m)$ ($\forall x \in B, m \in \mathbb{N}$), $W(J, m)$ ($\forall$ 开区间 $J \subset \mathbb{I}, m \in \mathbb{N}$) 和 $B \times \mathbb{N}$ 中的单点集. $\mathbb{I}$ 关于欧氏拓扑存在展开 $\{\mathscr{U}_m\}$, 使 $\mathscr{U}_m$ 是有限集且 $\mathscr{U}_{m+1}$ 加细 $\mathscr{U}_m$. 对 $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_m$ 是形如下述集合全体之集: $V(x, m)$ ($\forall x \in B$), $W(U, m)$ ($\forall U \in \mathscr{U}_m$) 和 $\{h\}$ ($\forall h \in B \times \{1, 2, \cdots, m-1\}$). 则 $\{\mathscr{P}_m\}_{m \geqslant 2}$ 是 H 的点有限展开. 故 H 是亚紧可展空间.

易验证, $\pi_{1|H} : H \to X$ 是开紧映射.

因为 Michael 直线不是 β 空间, 所以它不是亚紧可展空间. 由此可知, 度量空间的开紧映象的类并不关于开紧映射封闭. 含有度量空间的关于开紧映射封闭的空间类具有特别的意义.

定义 2.10.15[24]　MOBI 类是满足下列两条件的最小的拓扑空间类:

(1) 度量空间属于这个类;

(2) 关于开紧映射封闭的类.

显然, 开紧映射保持 MOBI 类.

定理 2.10.16[48]　Y 是 MOBI 类中的空间当且仅当存在度量空间 M 和开紧映射的有限集 $\{f_1, \cdots, f_n\}$, 使 $(f_n \circ \cdots \circ f_1)(M) = Y$.

证明　以 $\{\mathscr{H}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 表示满足定义 2.10.15 中两条件的空间类之族, 则 MOBI 类 $= \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{H}_\alpha$. 记 $\mathscr{B} = \{X :$ 存在度量空间 Z 和开紧映射的有限集 $\{f_1, \cdots, f_n\}$,

使 $(f_n \circ \cdots \circ f_1)(Z) = X\}$. 则存在 $\alpha \in \Lambda$, 使 $\mathscr{B} = \mathscr{H}_\alpha$, 从而 $\mathscr{B} \supset$ MOBI 类. 对 $\alpha \in \Lambda$, 若 $X \in \mathscr{B}$, 则存在度量空间 Z 和开紧映射的有限集 $\{f_1, \cdots, f_n\}$, 使 $(f_n \circ \cdots \circ f_1)(Z) = X$. 由定义 2.10.15, $X \in \mathscr{H}_\alpha$, 因此 $\mathscr{B} \subset \mathscr{H}_\alpha$, 所以 $\mathscr{B} \subset$ MOBI 类. 故 $\mathscr{B} =$ MOBI 类.

由推论 2.7.19 和定理 2.10.16, 有下述推论.

推论 2.10.17[24] 若 $Y \in$ MOBI 类, 则 Y 具有点可数基.

推论 2.10.17 的逆命题是否成立是耐人寻味的. Chaber[85] 曾证明, 具有点可数基的 T_1 空间是亚紧的可展 T_1 空间的开紧映象. 从而在 T_1 空间类中, MOBI 类刻画为具有点可数基的空间类. 如果用 MOBI_i 类表示定理 2.10.16 所述的每一开紧映射都具有 T_i 值域的 MOBI 类的子类, 其中 $i = 2, 3, 4$, 人们主要关注具有点可数基的 T_i 空间是否属于 MOBI_i 类? 例 2.10.14 表明, Michael 直线属于 MOBI_2 类.

问题 2.10.18[24] 逆紧映射是否保持 MOBI 类?

问题 2.10.19[85] 具有点可数基的空间是否属于 MOBI_2 类?

2.11 σ 局部有限映象

前面几节介绍空间与映射关系的思路是研究度量空间在所熟知的映射类下的象空间的特征. 对广义度量空间类, 可以尝试通过适当的途径定义映射类, 将空间类表为度量空间类在这映射类中映射的象. 本节定义的 σ 局部有限映射和 σ 映射就是依照这种思想, 分别将 σ 空间和 $\aleph$ 空间表为度量空间在这些映射下的象.

定义 2.11.1[287] 设映射 $f: X \to Y$. f 称为 σ 局部有限映射, 若对 X 的 σ 局部有限覆盖 $\mathscr{P}$, 存在 $\mathscr{P}$ 的加细 $\mathscr{F}$, 使 $f(\mathscr{F})$ 是 Y 的 σ 局部有限覆盖.

对 X 的集族 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ 称为 $\mathscr{P}$ 的 B 加细, 若 $\mathscr{F}$ 部分加细 $\mathscr{P}$, 并且 $\mathscr{P}$ 的任一元是 $\mathscr{F}$ 的某子集之并.

引理 2.11.2[287] 若 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的局部有限集族, 那么 $\mathscr{P}$ 存在互不相交的局部有限 B 加细 $\mathscr{F}$, 使对 $F \in \mathscr{F}$, $(\mathscr{P})_F$ 是有限的.

证明 置

$$F(\mathscr{B}) = \cap\mathscr{B} - \cup(\mathscr{P} - \mathscr{B}), \mathscr{B} \subset \mathscr{P};$$
$$\mathscr{F} = \{F(\mathscr{B}) : \varnothing \neq \mathscr{B} \subset \mathscr{P}\}.$$

则 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{P}$ 的互不相交的局部有限 B 加细且对 $F \in \mathscr{F}$, $(\mathscr{P})_F$ 是有限的.

命题 2.11.3[287] 若映射 $f: X \to Y$, 则 $(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$, 其中:

(1) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在加细 $\mathscr{B}$, 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族;

(2) X 的每一 σ 局部有限集族有 B 加细 $\mathscr{B}$, 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族;

(3) f 是 σ 局部有限映射.

证明　(1) ⇒ (3). 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的覆盖, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的. 对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_n$, 使 $\mathscr{U}_n$ 的每一元仅交 $\mathscr{P}_n$ 的有限个元, 于是 $\mathscr{U}_n$ 存在加细 $\mathscr{B}_n$, 使 $f(\mathscr{B}_n)$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathscr{P}_n \wedge \mathscr{B}_n)$ 是 $\mathscr{P}$ 的加细且 $f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathscr{P}_n \wedge \mathscr{B}_n))$ 是 Y 的 σ 局部有限覆盖. 故 f 是 σ 局部有限映射.

(2) ⇒ (3) 是显然的, 下面证明 (3) ⇒ (2). 只须证 X 的每一局部有限集族 $\mathscr{P}$ 有 B 加细 $\mathscr{B}$, 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 由引理 2.11.2, $\mathscr{P}$ 存在互不相交的局部有限 B 加细 $\mathscr{F}$, 使 $\mathscr{F}$ 的每一元仅交 $\mathscr{P}$ 的有限个元. 置

$$\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \{X - \cup\mathscr{F}\}.$$

那么 $\mathscr{H}$ 是 X 的局部有限覆盖, 于是 $\mathscr{H}$ 存在加细 $\mathscr{R}$, 使 $f(\mathscr{R})$ 是 σ 局部有限集族. 因为 $\mathscr{H}$ 是互不相交集族, 所以 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{H}$ 的 B 加细. 再置

$$\mathscr{B} = \{B \in \mathscr{R} : B \subset \cup\mathscr{F}\}.$$

则 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 B 加细, 于是 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{P}$ 的 B 加细且 $f(\mathscr{B})$ 是 σ 局部有限集族.

推论 2.11.4[287]　设映射 $f : X \to Y$. 若下述条件之一成立, 则 f 是 σ 局部有限映射.

(1) 存在 X 的几乎 $(\mathrm{mod}k)$ 网 $\mathscr{P}$, 使 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族.

(2) f 是闭 L 映射且 Y 是次仿紧空间.

证明　设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. (1) 置

$$\mathscr{H} = \{P \in \mathscr{P} : P \subset \cup\mathscr{F}, \mathscr{F} \in \mathscr{U}^{<\omega}\}.$$

那么 $\mathscr{H}$ 加细 $\mathscr{U}^F$ 且 $f(\mathscr{H})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族, 于是 $\mathscr{U}$ 存在加细 $\mathscr{B}$, 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 由命题 2.11.3, f 是 σ 局部有限映射.

(2) 对 $y \in Y$, 存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族 $\mathscr{U}_y$ 覆盖 $f^{-1}(y)$, 又存在 y 的开邻域 V_y, 使 $f^{-1}(V_y) \subset \cup\mathscr{U}_y$. 置 $\mathscr{V} = \{V_y\}_{y\in Y}$. 则 Y 的开覆盖 $\mathscr{V}$ 存在 σ 离散的闭加细 $\mathscr{F}$. 对 $F \in \mathscr{F}$, 存在 $y(F) \in Y$, 使 $F \subset V_{y(F)}$. 令

$$\mathscr{B} = \{f^{-1}(F) \cap U : F \in \mathscr{F}, U \in \mathscr{U}_{y(F)}\}.$$

则 $\mathscr{B}$ 加细 $\mathscr{U}$, 且 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 故 f 是 σ 局部有限映射.

推论 2.11.5[287]　σ 局部有限映射保持下述拓扑性质:

(1) 具有 σ 局部有限网;

(2) 具有 σ 局部有限几乎 $(\mathrm{mod}k)$ 网.

证明　设 $f : X \to Y$ 是 σ 局部有限映射. 让 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 局部有限网 (σ 局部有限几乎 $(\mathrm{mod}k)$ 网). 由命题 2.11.3, $\mathscr{P}$ 有 B 加细 $\mathscr{B}$, 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 这时 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的网 (几乎 $(\mathrm{mod}k)$ 网).

让 X 是 Michael 直线 (例 1.8.5). 由于 X 具有点可数基, 于是存在度量空间 M 和开 s 映射 $f: M \to X$. 因为 X 不是 σ 空间, 由推论 2.11.5, f 不是 σ 局部有限映射. 从而, 推论 2.11.4 的闭映射条件不可换为开映射条件.

由引理 1.5.13 和命题 2.4.7, 得到下述引理.

引理 2.11.6[287]　设 $\mathscr{P}$ 是空间 Y 的关于有限交封闭的 σ 局部有限闭几乎 $(\text{mod}k)$ 网, 则存在可度量空间 M, M 的 σ 离散基 $\mathscr{B}$ 和 $Y \times M$ 的子空间 X, 满足下述条件, 其中记 $f = \pi_{1|X}$, $g = \pi_{2|X}$.

(1) $\mathscr{P} = fg^{-1}(\mathscr{B})$;

(2) $g: X \to M$ 是逆紧映射.

定理 2.11.7[287]　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 σ 空间 (强 Σ 空间);

(2) X 是度量空间 (仿紧 M 空间) 的 σ 局部有限映象.

证明　由推论 2.11.5 得 (2) $\Rightarrow$ (1), 对仿紧 M 空间的情形, 还利用了推论 2.2.8 和命题 1.5.14.

(1) $\Rightarrow$ (2). 先设 $\mathscr{P}$ 是 σ 空间 X 的关于有限交封闭的 σ 局部有限闭网. 让 M 是集合 X. 赋予 M 以 $\mathscr{P}$ 作为基生成的拓扑. 则 $\mathscr{P}$ 是 M 的 σ 局部有限闭基, 于是 M 是度量空间. 令 $f = \text{id}_M: M \to X$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的网, f 是映射. 再由推论 2.11.4, f 是 σ 局部有限映射.

再设 $\mathscr{P}$ 是强 Σ 空间 X 的关于有限交封闭的 σ 局部有限闭几乎 $(\text{mod}k)$ 网. 由引理 2.11.6, 存在可度量空间 M, M 的 σ 离散基 $\mathscr{B}$ 和 $X \times M$ 的子空间 Z, 满足下述条件, 其中记 $f = \pi_{1|Z}$, $g = \pi_{2|Z}$.

(7.1) $\mathscr{P} = fg^{-1}(\mathscr{B})$;

(7.2) $g: Z \to M$ 是逆紧映射.

则 Z 是仿紧 M 空间, $g^{-1}(\mathscr{B})$ 是 Z 的 $(\text{mod}k)$ 网. 由推论 2.11.4, f 是 σ 局部有限映射.

上述定理中的正则性是重要的. $\mathbb{R}$ 的点无理扩张拓扑空间 X 是度量空间的 σ 局部有限映象 (见例 2.7.14 和例 2.10.9). 由于强 Σ 空间是次仿紧空间 (见定理 3.2.10), 所以 X 不是强 Σ 空间.

对具有可数 $(\text{mod}k)$ 网的空间, 有与推论 2.8.4 平行的结果.

推论 2.11.8[287]　正则空间 X 具有可数 $(\text{mod}k)$ 网当且仅当存在可分度量空间 M 和逆紧映射 $g: Z \to M$, 使 X 是 Z 的映象.

例 2.11.9[282]　存在局部紧仿紧空间 Z 和闭映射 $f: Z \to X$, 满足

(1) X 不是强 Σ 空间;

(2) f 不是 σ 局部有限映射.

对 $\alpha < \omega_1$, 设 $h_\alpha : \omega_1 + 1 \to T_\alpha$ 是同胚映射. 令 $Z = \bigoplus_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$. 则 Z 是局部紧仿紧空间. 令 $A = \{h_\alpha(\omega_1) : \alpha < \omega_1\}$. 取 X 为商空间 Z/A. 让 $f : Z \to X$ 是自然商映射. 则 f 是闭映射. 设 X 是强 Σ 空间. 让 $\mathscr{F}$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 局部有限闭 (mod$k$) 网. 记 $\widehat{\omega}_1 = fh_0(\omega_1)$. 对 $\alpha, \beta < \omega_1$, 记 $[\alpha(\beta), \widehat{\omega}_1) = fh_\beta([\alpha, \omega_1))$. 由 $\mathscr{F}$ 的 σ 局部有限性, 对 $\beta < \omega_1$, $\{F \in \mathscr{F} : \widehat{\omega}_1 \in F$ 且 $F \cap [0(\beta), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing\}$ 是可数的, 于是存在 $\alpha_\beta < \omega_1$, 使当 $F \in \mathscr{F}$ 且 $F \cap [\alpha_\beta(\beta), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing$ 时, $\widehat{\omega}_1 \in F$. 对 $F \in \mathscr{F}$, 置

$$\alpha(F) = \{\gamma < \omega_1 : F \cap [0(\gamma), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing\},$$
$$\mathscr{F}_0 = \{F \in \mathscr{F} : \widehat{\omega}_1 \in F, \alpha(F) < \omega_1\}.$$

则 $\mathscr{F}_0$ 是可数的. 于是存在 $\beta < \omega_1$, 使 $\beta > \sup\{\alpha(F) : F \in \mathscr{F}_0\}$. 这时, 若 $F \in \mathscr{F}$ 且 $F \cap [\alpha_\beta(\beta), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing$, 那么对不可数个 $\gamma < \omega_1$ 有 $F \cap [0(\gamma), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing$. 记

$$\{F \in \mathscr{F} : F \cap [\alpha_\beta(\beta), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing\} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

选取 $K \in \mathscr{K}$, 使 $K \cap [\alpha_\beta(\beta), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing$. 因为 $\{\gamma < \omega_1 : K \cap [0(\gamma), \widehat{\omega}_1) \neq \varnothing\}$ 是有限集, 可选取 X 的序列 $\{x_n\}$ 及 ω_1 中非平凡的序列 $\{\gamma_n\}$, 使 $x_n \in (F_n - K) \cap [0(\gamma_n), \widehat{\omega}_1)$. 从而存在 $F \in \mathscr{F}$, 使 $K \subset F \subset X - \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $F = F_m$, 因此 $x_m \in F$, 矛盾. 故 X 不是强 Σ 空间. 再由推论 2.11.5, f 不是 σ 局部有限映射.

本节第二部分, 介绍如何把 $\aleph$ 空间表示为度量空间的特定映象.

定义 2.11.10[231] 设映射 $f : X \to Y$. f 称为 σ 映射, 若存在 X 的基 $\mathscr{B}$, 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族.

定义于可分度量空间上的映射是 σ 映射. 由命题 2.11.3, σ 映射是 σ 局部有限映射.

定理 2.11.11[231] 正则空间 X 是 σ 空间当且仅当 X 是可度量空间的 σ 映象.

证明 设 X 是 σ 空间. 由定理 2.11.7 中 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明, X 是某一可度量空间的 σ 映象. 由于 σ 映射是 σ 局部有限映射, 所以度量空间的正则的 σ 映象是 σ 空间.

定理 2.11.12 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 $\aleph$ 空间;

(2) X 是度量空间的序列商 σ 映象 [380];

(3) X 是度量空间的序列覆盖 σ 映象 [380];

(4) X 是度量空间的紧覆盖 σ 映象 [231].

证明 (1) $\Rightarrow$ (4). 设 $\mathscr{P}$ 是 $\aleph$ 空间 X 的关于有限交封闭的 σ 局部有限闭 k 网. 记 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ 是局部有限的且不妨设 $X \in \mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. Λ_n 赋予离散拓扑. 置

$$M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i:\{P_{\alpha_i}\}\text{ 是 }X\text{ 中某点 }x(\alpha)\text{ 的网 }\}.$$

则 M 是可度量空间, 并且对 $\alpha\in M$, $x(\alpha)$ 是唯一确定的. 于是可以定义函数 $f:M\to X$, 使 $f(\alpha)=x(\alpha)$. 易验证, f 是映射. 下面证明 f 是紧覆盖的 σ 映射.

(12.1) f 是 σ 映射. 对 $n\in\mathbb{N},\alpha_n\in\Lambda_n$, 置

$$B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{\alpha\in M:\pi_i(\alpha)=\alpha_i,i\leqslant n\},$$
$$\mathscr{B}=\{B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\in\Lambda_i,i\leqslant n\}.$$

则 $\mathscr{B}$ 是 M 的基. 为证明 f 是 σ 映射, 只须验证 $f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 显然 $f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 若 $x\in\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$, 存在 $\beta=(\beta_k)\in M$, 使 $f(\beta)=x$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $\alpha_{k+n}\in\Lambda_{k+n}$, 使 $P_{\alpha_{k+n}}=P_{\beta_k}$. 置 $\alpha=(\alpha_k)$. 那么 $\alpha\in B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 且 $f(\alpha)=x$. 因此, $\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}\subset f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))$.

(12.2) f 是紧覆盖映射. 对 $K\in\mathscr{K}(X)$, 由引理 2.7.9, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限集列 $\{\mathscr{F}_i\}$, 满足命题 2.7.1 的条件 (i) 和 (ii). 取序列 $\{n\}$ 的子列 $\{n_i\}$, 使 $\mathscr{F}_i\subset\mathscr{P}_{n_i}$. 不妨设, $n_1=1$. 对 $i\in\mathbb{N}$ 及 $n_i\leqslant n<n_{i+1}$, 让 $\mathscr{P}'_n=\mathscr{F}_i$. 则 $\mathscr{P}'_n\subset\mathscr{P}_n$, 于是存在 $\Gamma_n\in\Lambda_n^{<\omega}$, 使 $\mathscr{P}'_n=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_n}$. 置

$$L=\{\alpha=(\alpha_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n:\bigcap_{n\in\mathbb{N}}P_{\alpha_n}\cap K\neq\varnothing\}.$$

由命题 2.7.1 所证, L 是 M 的紧集且 $f(L)=K$. 所以 f 是紧覆盖映射.

(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) 是显然的, 下面证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 设 $f:M\to X$ 是序列商 σ 映射, 其中 M 是度量空间. 存在 M 的基 $\mathscr{B}$, 使 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ 局部有限集族. 由命题 2.7.2 和 1.6.7, $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ 局部有限 k 网. 故 X 是 $\aleph$ 空间.

例 2.11.13 *V* 空间 X (例 1.8.1 和 2.4.15): 存在度量空间 M 和 σ 局部有限映射 $f:M\to X$, 具有性质:

(1) f 是紧覆盖映射, 但 X 不是 $\aleph$ 空间;

(2) f 是开紧映射, 但 X 不是 g 可度量空间;

(3) f 不是 σ 映射.

由例 2.4.15, 存在度量空间 M 和紧覆盖的有限到一开映射 $f:M\to X$. 由推论 2.11.4, f 是 σ 局部有限映射. 由定理 2.5.17, X 不是 $\aleph$ 空间. 又由推论 1.6.8, X 也不是 g 可度量空间. 由定理 2.11.12, f 不是 σ 映射.

关于 g 可度量空间的映射刻画, 见定理 3.9.13 的相关结果.

第三章　广义度量空间类

第 2 章阐述了度量空间在几类映射下象空间或逆象空间的内在特征. 由此可见, 应用映射与空间的相互分类原则, 通过度量空间以及闭映射、开映射、可数双商映射、伪开映射、商映射、s 映射、紧映射和 π 映射等, 将一般拓扑学中的一些重要概念, 如基、覆盖列、网、k 网、cs^* 网和 $(\mathrm{mod}k)$ 网等以及由此所导出的广义度量空间类, 如可展空间、半度量空间、弱第一可数空间、M 空间、σ 空间和强 Σ 空间等联结于一体. 这一方面说明了用映射对空间进行研究的效果与威力, 另一方面也表明了在第 2 章中所出现的广义度量空间类在拓扑空间论的研究中占据核心位置.

映射与空间相互分类的基本问题是, 在各类映射作用下, 哪些拓扑性质保持不变 (问题 2.0.6). 本章的中心议题之一是确定怎样的映射类保持特定的广义度量空间类. 为此, 必须充分地探讨广义度量空间类的各种性质, 尤其重要的是寻求它们的刻画 — 本章最精彩的内容之一.

在所涉及的广义度量空间类中, 有相当数量的空间是从 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理 (定理 1.3.2), 或 Michael 关于仿紧性的刻画 (见附录 A 定理 1.2), 或 Burke-Junnila 关于次仿紧性的特征 (见附录 A 定理 3.3), 利用 σ 离散集族, 或 σ 局部有限集族, 或 σ 闭包保持集族, 或 σ 垫状集族来定义的. 这是产生广义度量空间类的有效方法, 并导致一类有趣的问题: 利用这四种集族定义的空间类, 在什么条件下是等价的?

这类问题对考虑闭映射是否保持这些空间类时显得特别重要. 下面将看到该类问题对 σ 空间的成功回答 (定理3.3.1) 成为一般拓扑学的典范. 一般来说, 在 σ 离散集族与 σ 局部有限集族中, 问题大多有正面的答案; 在 σ 局部有限集族与 σ 闭包保持集族中, 问题呈现复杂化; 而在 σ 闭包保持集族与 σ 垫状集族中, 问题显得异常的困难. 本章的特色之一, 是较全面地阐述了由 σ 遗传闭包保持集族定义的空间. 从 Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理 (定理 2.5.17) 看出, 研究 σ 局部有限集族与 σ 遗传闭包保持集族关系这一问题的曙光, 而且该问题在讨论闭映射是否保持适当的空间类时所占据的位置与对 σ 闭包保持集族的研究是同等重要的.

3.1　具有点可数覆盖的空间

在第 2 章中, 为解决 Arhangel'skiĭ 关于度量空间商 s 映象的刻画, 以及研究与此相关的开 s 映象、开紧映象等问题, 涉及了大量具有特定性质的点可数覆盖, 并且探讨了它们之间的初步关系. 本节的目的是集中讨论一些点可数覆盖性质, 包括它们的度量化定理以及映射性质.

定义 3.1.1　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 p 基 [34], 如果 $\mathscr{P} \subset \tau$ 且 $\mathscr{P}$ 是 X 的 p 网.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 p 亚基, 如果对 $x \neq y \in X$, 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{y\}$.

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 p-k 网, 如果对 $K \in \mathscr{K}(X)$ 及 $y \in X - K$, 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{y\}$.

p 亚基与 p-k 网的含意早已出现于文献 [77, 143]. 为叙述的方便起见, 参照 p 网的定义, 在此分别命名为 p 亚基和 p-k 网. 显然, 对空间 X, p 基 $\Rightarrow$ p 亚基 $\Rightarrow$ p-k 网.

命题 3.1.2　下述空间类具有点可数 k 网:

(1) 具有 σ 遗传闭包保持 k 网 [112];

(2) 度量空间的商 s 映象 [143].

证明　由定理 2.5.11 的证明, 具有 σ 遗传闭包保持 k 网的空间具有 σ 紧有限 k 网, 从而它具有点可数 k 网. 由引理 2.7.11, 度量空间的商 s 映象具有点可数 k 网.

命题 3.1.3[77]　具有 G_δ 对角线的次仿紧空间具有点可数 p 亚基.

证明　设 X 是具有 G_δ 对角线的次仿紧空间. 则 X 具有闭 p 网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的. 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$F_n(\mathscr{B}) = \cap\mathscr{B} - \cup(\mathscr{P}_n - \mathscr{B}), \mathscr{B} \subset \mathscr{P}_n;$$
$$\mathscr{F}_n = \{F_n(\mathscr{B}) : \mathscr{B} \subset \mathscr{P}_n\}.$$

那么 $\mathscr{F}_n$ 是 X 的互不相交覆盖. 对 $x \neq y \in X$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $B \in \mathscr{P}_m$, 使 $y \in B \subset X - \{x\}$. 置

$$\mathscr{H} = \{F_m(\mathscr{B}) : \mathscr{B} \subset (\mathscr{P}_m)_x\}.$$

那么 $\mathscr{H} \in \mathscr{F}_m^{<\omega}$. 如果 $\mathscr{B} \subset (\mathscr{P}_m)_x$, 那么 $B \in \mathscr{P}_m - \mathscr{B}$, 于是 $F_m(\mathscr{B}) \subset X - B$, 所以 $\cup\mathscr{H} \subset X - \{y\}$. 设 $U = X - \cup(\mathscr{P}_m - (\mathscr{P}_m)_x)$. 那么 $x \in U \in \tau$. 如果 $z \in U$, 那么 $(\mathscr{P}_m)_z \subset (\mathscr{P}_m)_x$, 于是 $z \in F_m((\mathscr{P}_m)_z) \in \mathscr{H}$, 从而 $U \subset \cup\mathscr{H}$. 因此 $x \in (\cup\mathscr{H})^\circ \subset \cup\mathscr{H} \subset X - \{y\}$. 故 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 X 的点可数 p 亚基.

推论 3.1.4　半层空间具有点可数 p 亚基.

问题 3.1.5　(1) 具有点可数 p 亚基的 β 空间是否是半层空间?

(2) 具有点可数基的 β 空间是否是半层空间?

(3) 具有点可数基的集态正规的 β 空间是否是可度量空间 [38]?

引理 3.1.6　满足下述条件之一的可数紧空间是紧可度量空间:

(1) 具有点可数 p 亚基的空间 [77];

(2) 具有点可数 p-k 网的 k 空间 [143].

证明　设 X 是可数紧空间.

(6.1) 让 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 p 亚基. 那么 $\mathscr{P}$ 具有性质: 若 $A \in X^{<\omega}$ 且 $x \in X - A$, 则存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X - A$. 置

$$\mathscr{H} = \cup\{\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega} : \mathscr{F}\ \text{是}\ X\ \text{的极小覆盖}\}.$$

由 Miščenko 引理, $\mathscr{H}$ 是可数的.

(6.1.1) $\mathscr{H}$ 是 X 的 p 亚基.

对 $x \neq y \in X$, 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{y\}$. 不妨设 $\mathscr{F}$ 是 $\{x\}$ 的极小内部覆盖. 对 $F \in \mathscr{F}$, 存在 $x(F) \in (\cup\mathscr{F})^\circ \cap (X - \cup(\mathscr{F} - \{F\}))$, 这时 $x(F) \in F \cap (\cup\mathscr{F})^\circ - \cup(\mathscr{F} - \{F\})$. 置 $A = \{x(F) : F \in \mathscr{F}\}$. 对 $z \in X - A$, 存在 $\mathscr{F}_z \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $z \in (\cup\mathscr{F}_z)^\circ \subset \cup\mathscr{F}_z \subset X - A$. 定义

$$\mathscr{R} = \mathscr{F} \cup (\cup\{\mathscr{F}_z : z \in X - A\}).$$

对 $p \in X$, 记 $(\mathscr{R})_p = \{P_i(p)\}_{i\in\mathbb{N}}$. 断言: 存在 $\mathscr{R}$ 的有限集覆盖 X. 否则, 存在 X 的子集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 使当 $i, j < n$ 时, $x_n \notin P_i(x_j)$. 设 a 是 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的聚点. 因为 $X = (\cup\mathscr{F})^\circ \cup (\bigcup_{z\in X-A}(\cup\mathscr{F}_z)^\circ)$, 存在 $P \in \mathscr{R}$, 使 P 含子列 $\{x_{n_k}\}$. 取 $i, j \in \mathbb{N}$, 使 $P = P_i(x_j)$. 再取 $m \in \mathbb{N}$, 使 $n_m > i, j$. 那么 $x_{n_m} \in P_i(x_j)$, 矛盾. 因此, 存在 $\mathscr{B} \in \mathscr{R}^{<\omega}$, 使 $X = \cup\mathscr{B}$. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的极小覆盖. 则 $\mathscr{B} \subset \mathscr{H}$. 对 $F \in \mathscr{F}$, 因为 $(\mathscr{R})_{x(F)} = \{F\}$, 所以 $F \in \mathscr{B}$, 因而 $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}$. 故 $\mathscr{H}$ 是 p 亚基.

(6.1.2) X 具有可数闭网.

置

$$\mathscr{E} = \{X - (\cup\mathscr{F})^\circ : \mathscr{F} \in \mathscr{H}^{<\omega}\},$$
$$\mathscr{C} = \{\cap\mathscr{E}' : \mathscr{E}' \in \mathscr{E}^{<\omega}\}.$$

对 $x \in V \in \tau$, 由 (6.1.1), $\{x\} = \cap(\mathscr{E})_x$, 于是 $\{V\} \cup \{X - E : E \in (\mathscr{E})_x\}$ 是 X 的开覆盖, 因此存在 $\mathscr{E}' \in \mathscr{E}^{<\omega}$, 使 $x \in \cap\mathscr{E}' \subset V$. 故 $\mathscr{C}$ 是 X 的可数闭网.

由此, X 是半层空间, 再由推论 1.4.12, X 是紧可度量空间.

(6.2) 让 k 空间 X 具有点可数 p-k 网 $\mathscr{P}$. 则 $\mathscr{P}$ 是 p 亚基. 事实上, 若 $K \in \mathscr{K}(X)$, 则 $\mathscr{P}_{|K}$ 是 K 的点可数 p 亚基, 于是 K 是可度量的. 由推论 2.3.5, X 是序列空间. 对 $x \neq y \in X$, 存在 x 的闭邻域 $L \subset X - \{y\}$. 与命题 1.6.7 类似的证

法, 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $L \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{y\}$, 因此 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{y\}$. 故 $\mathscr{P}$ 是 X 的 p 亚基, 所以 X 是紧可度量空间.

定理 3.1.7 设强 Fréchet 空间 X 具有点可数 k 网. 则 X 是第一可数空间[239]. 如果更设 X 是正则空间, 则 X 具有点可数基 [143].

证明 设 $\mathscr{P}$ 是强 Fréchet 空间 X 的点可数 k 网.

(7.1) 对 $x \in W \in \tau$, 有 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset W$.

令 $\mathscr{P}' = \{P \in \mathscr{P} : P \subset W\}$. 则 $\mathscr{P}'$ 是 W 的点可数 k 网. 由引理 2.7.13, 有 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}'^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset W$.

(7.2) 设 X 是正则空间. 对 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 置

$$H(\mathscr{F}) = \{x \in X : \mathscr{F} \text{ 是 } \{x\} \text{ 的极小内部覆盖 }\}.$$

记 $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对 $\alpha \in \Lambda$, 置

$$B_\alpha = P_\alpha \cup (\cup\{H(\mathscr{F}) : P_\alpha \in \mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}\}).$$

若 $x \in H(\mathscr{F})$, 其中 $P_\alpha \in \mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 那么 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ - (\cup(\mathscr{F} - \{P_\alpha\}))^\circ$, 于是 $x \in \overline{P}_\alpha$. 故 $B_\alpha \subset \overline{P}_\alpha$. 再置 $\mathscr{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 由引理 2.7.15, 对 $x \in X$, $\{\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega} : x \in H(\mathscr{F})\}$ 是可数的, 所以 $(\mathscr{B})_x$ 是可数的. 下面证明 $\mathscr{B}$ 满足命题 2.7.16 的条件. 对 $x \in U \in \tau$, 由 X 的正则性, 存在 $W \in \tau$, 使 $x \in W \subset \overline{W} \subset U$. 再由 (7.1), 有 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset W$. 不妨设 $x \in H(\mathscr{F})$. 置 $\mathscr{R} = \{B_\alpha : P_\alpha \in \mathscr{F}\}$. 那么 $x \in \cap\mathscr{R}$ 且 $x \in (\cup\mathscr{R})^\circ \subset \overline{\cup\mathscr{F}} \subset U$. 故 X 具有点可数基.

(7.3) 设 X 不是正则空间. 对 $x_0 \in X$, 在 X 上定义新拓扑 τ^* 如下: 对 $x \neq x_0, \{x\} \in \tau^*$; x_0 的邻域基取为在 τ 中的邻域基. 那么 τ^* 是正则空间.

设 $\{A_n\}$ 是 X 中递减的集列且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_{\tau^*}(A_n)$. 若 $x \neq x_0$, 则 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, 取 $x_n = x \in A_n$. 这时 $\{x_n\}$ 在 τ^* 中收敛于 x. 若 $x = x_0$, 则 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_\tau(A_n)$. 于是存在 $x_n \in A_n$, 使 $\{x_n\}$ 在 τ 中收敛于 x, 从而 $\{x_n\}$ 在 τ^* 中也收敛于 x. 所以 (X, τ^*) 是强 Fréchet 空间.

记 $\mathscr{P}^* = \{\{x\} : x \neq x_0\} \cup \mathscr{P}$. 则 $\mathscr{P}^*$ 是点可数的. 设 $x \in W \in \tau^*$. 若 $x \neq x_0$, 取 $F = \{x\} \in \mathscr{P}^*$. 则 $x \in \mathrm{int}_{\tau^*}(F) = F \subset W$. 若 $x = x_0$, 则存在 $V \in \tau$, 使 $x \in V \subset W$. 由 (7.1), 有 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $x \in \mathrm{int}_\tau(\cup\mathscr{F}) \subset \cup\mathscr{F} \subset V$, 这时 $x \in \mathrm{int}_{\tau^*}(\cup\mathscr{F}) \subset \cup\mathscr{F} \subset W$. 从而 $\mathscr{P}^*$ 在 (X, τ^*) 中满足 (7.1). 由 (7.2), (X, τ^*) 具有点可数基, 于是 (X, τ) 在 x_0 具有可数局部基. 故 X 是第一可数空间.

定理 3.1.8[143] 下述条件等价:

(1) X 是可度量空间;

(2) X 是具有点可数 p 亚基的 M 空间;

(3) X 是具有点可数 p-k 网的仿紧 M 空间;

(4) X 是具有点可数 p-k 网的 k 空间和 M 空间.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的. 由引理 3.1.6 知 (2) $\Rightarrow$ (3). 再由命题 2.4.9 和 2.4.10 知 (3) $\Rightarrow$ (4). 下面证明 (4) $\Rightarrow$ (1). 由引理 3.1.6, 具有点可数 p-k 网的 k 空间和 M 空间是仿紧空间. 由定理 2.2.12, 只须证

(8.1) 具有点可数 p-k 网和严格 p 序列的次亚紧空间具有 G_δ 对角线.

设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是具有点可数 p-k 网的次亚紧空间 X 的严格 p 序列. 对 $x \in X$, 令

$$C_x = \cap\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

那么 $C_x \in \mathscr{K}(X)$. 由引理 3.1.6, C_x 是紧可度量子空间, 再由引理 2.6.2, C_x 在 X 中具有可数外基, 从而 x 有可数邻域基. 故 X 是第一可数空间. 如定理 3.1.7 中 (7.1) 所证, X 具有点可数 p 亚基, 于是 X^2 也具有点可数 p 亚基, 设为 $\mathscr{P}$.

对 $i \in \mathbb{N}$, 设 $\{\mathscr{H}(i,k)\}$ 是 $\mathscr{U}_i$ 的 θ 开加细序列, 并且令 $\mathscr{H}(i,j,k,l) = \mathscr{H}(i,k) \times \mathscr{H}(j,l)$. 对 X^2 的对角线 Δ 及 $H \in \mathscr{H}(i,j,k,l)$, 由引理 2.7.15, $\mathscr{P}$ 的元组成的 $\Delta \cap H$ 的有限极小内部覆盖之全体是可数族, 设为 $\mathscr{H}$. 记

$$\mathscr{H} = \{\mathscr{H}(i,j,k,l,m) : m \in \mathbb{N}\},$$

$$H(i,j,k,l,m) = (\cup\mathscr{H}(i,j,k,l,m))^\circ,$$

$$W(i,j,k,l,m) = \cup\{H \cap (\cup\{H(i,j,k,l,n) : n \leqslant m\}) : H \in \mathscr{H}(i,j,k,l)\}.$$

则 $\Delta \subset \cap\{W(i,j,k,l,m) : i,j,k,l,m \in \mathbb{N}\}$. 另一方面, 由于 $\{\mathscr{U}_i \times \mathscr{U}_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 是 X^2 的严格 p 序列, 对 $p = (x,y) \in X^2 - \Delta$, 记 $D_p = \bigcap_{i,j\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(p, \mathscr{U}_i \times \mathscr{U}_j)$. 则 $D_p \cap \Delta$ 是 X^2 的紧集, 于是存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $D_p \cap \Delta \subset (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X^2 - \{p\}$, 从而存在 $i,j \in \mathbb{N}$, 使 $D_p \subset \mathrm{st}(p, \mathscr{U}_i \times \mathscr{U}_j) \subset (\cup\mathscr{F})^\circ \cup (X^2 - \Delta)$. 这时存在 $k,l,n \in \mathbb{N}$, 使 $(\mathscr{H}(i,j,k,l))_p = \{H_t\}_{t\leqslant n}$. 对 $t \leqslant n$, 由于 $\Delta \cap H_t \subset (\cup\mathscr{F})^\circ$, 存在 $m_t \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{H}(i,j,k,l,m_t)$ 是 $\Delta \cap H_t$ 的有限极小内部覆盖. 令 $m = \max\{m_t : t \leqslant n\}$. 那么 $p \notin W(i,j,k,l,m)$. 故 $\Delta = \cap\{W(i,j,k,l,m) : i,j,k,l,m \in \mathbb{N}\}$. 因而 X 具有 G_δ 对角线.

由命题 3.1.2 和定理 3.1.8, 有下述推论.

推论 3.1.9[143] 度量空间的商 s 映象是可度量空间当且仅当它是 M 空间.

例 3.1.10 具有点可数覆盖的空间.

(1) 点可数 k 网, 点可数 p 基 $\not\Rightarrow$ 点可数 cs^* 网, 如空间 S_{ω_1} (例 1.8.7).

(2) 点可数 cs 网 $\not\Rightarrow$ 点可数 p-k 网, 如紧化 $\beta\mathbb{N}$.

(3) 点可数基 $\not\Rightarrow$ 点可数闭 k 网, 如 $\mathbb{R}$ 的点无理扩张拓扑空间 (例 2.7.14). 另, Foged[114] 构造不具有点可数闭 k 网的正则空间, 具有点可数基.

(4) 点可数 p 亚基 $\not\Rightarrow$ 点可数 p 基. 让 X 是集 $\omega_1 + 1$, 其中 X 的唯一聚点 ω_1 具有序拓扑下的邻域. 因为 X 不具有点 G_δ 性质, 所以 X 不具有点可数 p 基. 定义

$$\mathscr{P} = \{\{\alpha\} : \alpha \leqslant \omega_1\} \cup \{(\alpha, \omega_1) : \alpha < \omega_1\}.$$

那么 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 p 亚基.

(5) 点可数闭 k 网的可数紧空间 $\not\Rightarrow$ 点可数 p 亚基, 如例 2.4.14(4) 中的 Frolík 空间.

下一例说明: 点可数闭 k 网 $\not\Rightarrow$ 点可数 cs 网.

例 3.1.11[143] 存在局部紧的度量空间 Z, 紧覆盖的商紧映射 $f: Z \to X$ 以及逆紧映射 $g: X \to Y$, 具有性质:

(1) X 具有点可数闭 k 网;

(2) X 不具有点可数 cs 网 [247];

(3) Y 不具有点可数 cs^* 网.

对 $x \in \mathbb{I}$, 设 $S(x)$ 同胚于 $\mathbb{S}_1$. 置

$$Z = \mathbb{I} \oplus (\oplus\{S(x) : x \in \mathbb{I}\}).$$

则 Z 是局部紧的度量空间. 让 X 是将每一 $x \in \mathbb{I}$ 与 $S(x)$ 的极限点贴合成一点得到的商空间, 用 f 表示这个商映射. 则 f 是紧映射. 由定理 2.7.12, f 是紧覆盖映射且 X 具有点可数闭 k 网. 由定理 2.10.6, X 是 g 第一可数空间. 将 X 的紧集 $\mathbb{I}$ 贴合成一点得到的商空间记为 Y, 用 g 表示这个商映射. 则 g 是逆紧映射, 并且 Y 含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 由例 1.8.7, Y 不具有点可数 cs^* 网.

若 X 具有点可数 cs 网, 由命题 1.6.21, X 具有点可数弱基. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的关于有限交封闭的点可数弱基. 对 $x \in X$, 注意到 $X - \mathbb{I}$ 的点是 X 的孤立点, 并且 X 的子空间 $\mathbb{I}$ 就是欧氏子空间, 于是可选取 x 的可数弱基 $\mathscr{B}_x = \{B_{xn}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}$, 满足

(11.1) $B_{xn+1} \subset B_{xn}$;

(11.2) 对 $x \in X - \mathbb{I}, B_{xn} = \{x\}$;

(11.3) 对 $x \in \mathbb{I}$, 存在 $\mathbb{I}$ 中由有理数端点构成的含 x 的开区间组成的集列 $\{V_{xn}\}$, 使 $V_{xn} \subset B_{xn}$.

置

$$\mathscr{P} = \cup\{\mathscr{B}_x : x \in X\}, \mathscr{P}' = \cup\{\mathscr{B}_x : x \in \mathbb{I}\}.$$

则 $\mathscr{P}$ 是 X 的弱基. 一方面, $\mathscr{P} - \mathscr{P}'$ 是 X 的 σ 离散集族. 另一方面, 对固定的 V_{xn}, 由 $\mathscr{B}$ 的点可数性, $\{B \in \mathscr{P}' : V_{xn} \subset B\}$ 是可数的, 又由于 $\mathscr{P}' = \{B \in \mathscr{P}' :$ 存在 $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{I}$, 使 $V_{xn} \subset B\}$, 所以 $\mathscr{P}'$ 也是可数的. 从而 X 具有 σ 离散弱基, 因此 X 是 $\aleph$ 空间. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 的 σ 局部有限闭 k 网. 那么 $g(\mathscr{R})$ 是 Y 的 σ 局部有限闭 k 网, 矛盾. 故 X 不具有点可数 cs 网.

本节第二部分, 讨论点可数覆盖的映射性质.

命题 3.1.12[143] 逆紧映射保持下述性质:

(1) 点可数 p 亚基;

(2) 点可数 p-k 网.

证明 仅证明 (1), (2) 的证明是类似的. 设 $f: X \to Y$ 是逆紧映射, 其中 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 p 亚基. 定义

$$H(\mathscr{F}) = \{y \in Y : \mathscr{F} \text{ 是 } f^{-1}(y) \text{ 的极小覆盖}\},\ \mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega};$$
$$\mathscr{H} = \{H(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}\}.$$

由 Miščenko 引理, $\mathscr{H}$ 是 Y 的点可数集族. 对 $y \neq z \in Y$, 取 $x \in f^{-1}(z)$, 那么 $f^{-1}(y) \subset X - \{x\}$, 于是存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}$, 使 $f^{-1}(y) \subset (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{x\}$. 置 $\mathscr{R} = \{H(\mathscr{F}') : \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}\}$. 那么 $\mathscr{R} \in \mathscr{H}^{<\omega}$ 且 $\cup\mathscr{R} = \{p \in Y : f^{-1}(p) \subset \cup\mathscr{F}\}$, 于是 $y \in Y - f(X - (\cup\mathscr{F})^\circ) \subset \cup\mathscr{R}$, 从而 $y \in (\cup\mathscr{R})^\circ \subset \cup\mathscr{R} \subset Y - \{z\}$. 故 Y 具有点可数 p 亚基.

命题 3.1.13 设闭映射 $f: X \to Y$ 在 X 的每一闭子空间上的限制是紧覆盖映射. 若 X 具有点可数 k 网, 则 Y 也具有点可数 k 网.

证明 由引理 3.1.6 及 f 是紧覆盖映射, Y 的每一紧集是序列空间. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 k 网. 令 $D = \{x_y : y \in Y\}$, 其中取定 $x_y \in f^{-1}(y)$. 再令 $\mathscr{Q} = \{f(D \cap P) : P \in \mathscr{P}\}$. 那么 $\mathscr{Q}$ 是 Y 的点可数覆盖. 设 Y 的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 $y \in U \in \tau(Y)$. 不妨设所有 $y_n \in U$. 又令 $Z = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup f^{-1}(y)$, 其中 $x_n = x_{y_n}$. 则 Z 是 X 的闭集, 于是 $f_{|Z} : Z \to \{y\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是紧覆盖映射. 存在 Z 的紧集 L, 使 $f(L) = \{y\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, 从而 $x_n \in L \subset f^{-1}(U)$, 所以存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 P 含无限项 $\{x_n\}$ 且 $P \subset f^{-1}(U)$. 因此含无限项 $\{y_n\}$ 的 $f(D \cap P) \subset U$. 由命题 1.6.7 后的说明, $\mathscr{Q}$ 是 Y 的点可数 k 网.

由命题 2.1.16, 有下述推论.

推论 3.1.14[143, 247] 逆紧映射或具有正则定义域的闭 L 映射保持点可数 k 网空间性质.

下面给出几个逆紧映射, 闭映射或开 s 映射不保持点可数覆盖的例.

引理 3.1.15 (Tanaka, 2000) 每一完全正则空间是具有点可数 cs 网的完全正则空间的逆紧映象.

证明 设 X 是完全正则空间. 让 D 是集合 X 赋予离散拓扑的空间, $f: D \to X$ 是恒同映射. 依 Tychonoff 紧扩张定理, f 存在连续扩张 $h = \beta f : \beta D \to \beta X$. 则 h 是逆紧映射. 让 $E = \{z \in \beta D : h(z) \in X\}, g = h_{|E} : E \to X$. 则 E 是完全正则空间且 g 是逆紧映射. 由于 βD 中不存在非平凡的收敛序列, 所以 E 中也不存在非平凡的收敛序列. 令 $\mathscr{P} = \{\{z\} : z \in E\}$. 则 $\mathscr{P}$ 是 E 的点可数 cs 网. 从而 X 是具有点可数 cs 网的完全正则空间的逆紧映象.

例 3.1.16 Arens 空间 S_2 (例 1.8.6).

(1) S_2 是可分度量空间的商有限到一映象.

(2) 序列扇 S_ω 是 S_2 的逆紧映象.

Arens 空间 $X = \omega \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. 采用例 1.8.6 的记号, 那么 X 关于覆盖 $\mathscr{H} = \{\omega\} \cup \{V(n, 1) : n \in \mathbb{N}\}$ 具有弱拓扑. 设 $f : \oplus\mathscr{H} \to X$ 是自然映射. 那么 $\oplus\mathscr{H}$ 是可分度量空间且 f 是商有限到一映射.

对序列扇 $Y = \{0\} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ (例 1.8.7), 定义 $g : X \to Y$, 使对 $x \in X$, 有

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \omega, \\ x, & x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \end{cases}$$

则 g 是逆紧映射.

例 3.1.17 逆紧映射不保持下述点可数覆盖性质.

(1) 度量空间的商 π 映象, 如例 3.1.16, 因为 S_ω 不是 g 第一可数空间.

(2) 度量空间的商紧映象, 如例 3.1.16, 因为 S_ω 不是 g 第一可数空间.

(3) 度量空间的伪开 π 映象, 如例 2.4.13, 因为, 由定理 2.9.15, 蝶形空间是度量空间的伪开 π 映象.

(4) 度量空间的商 s 映象, 如例 3.1.11, 因为, 由推论 2.7.5, Y 不是度量空间的商 s 映象.

(5) 点可数弱基, 如例 3.1.16.

(6) 点可数 cs 网, 如对扇空间 S_{ω_1}, 利用引理 3.1.15.

(7) 点可数闭 k 网, 如例 3.1.11.

(8) 点可数 cs^* 网, 如例 3.1.11.

问题 3.1.18[71] 逆紧映射是否保持具有点可数 p 基的空间?

问题 3.1.19[143] 逆紧映射或伪开 s 映射是否保持度量空间的伪开 s 映象?

空间 X 的点 x 称为弱 P 点, 如果对 $X - \{x\}$ 的每一可数集 C 有 $x \notin \overline{C}$. $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ 中含弱 P 点 [208].

例 3.1.20[345] 闭映射不保持具有点可数 k 网的空间.

设 D 是任一基数为 $\aleph_1$ 的集合. 赋予 D 离散拓扑. 让

$$D^* = \beta D - D,$$
$$E = \{p \in D^* : p \text{ 是 } D^* \text{ 的弱 } P \text{ 点 }\}.$$

令 $X = D \cup E$. 赋 X 予 βD 的子空间拓扑. 则 E 是 X 的闭子空间.

(20.1) E 是 D^* 的稠集.

设 $V \in \tau(\beta D)$ 且 $V \cap D^*$ 非空. 则存在 $W \in \tau(\beta D)$, 使 $\mathrm{cl}_{\beta D}(W) \subset V$ 且 $W \cap D^* \neq \varnothing$. 因为 D 是 βD 的稠集, 所以 $W \cap D$ 含可数无限集 C. 由于 $\mathrm{cl}_{\beta D}(C)$ 同胚于 $\beta\mathbb{N}$, 于是 $\varnothing \neq \mathrm{cl}_{\beta D}(C) \cap E \subset \mathrm{cl}_{\beta D}(W) \cap D^* \subset V \cap D^*$, 从而 $E \cap V \cap D^* \neq \varnothing$. 故 E 是 D^* 的稠集.

(20.2) 若 $K \in \mathscr{K}(X)$, 则 K 是有限集.

由于每一点是弱 P 点的空间的任一可数集是闭离散子空间, 于是每一点是弱 P 点的紧空间是有限集, 所以 $K \cap E$ 是有限集. 若 K 是无限集, 则 $K \cap D$ 是无限集. 取定 $K \cap D$ 中非平凡的序列 $\{x_n\}$. 则存在 $p \in (\mathrm{cl}_{\beta D}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \cap E \subset K$. 因为 $\{x_n\}$ 的任一子列都有聚点且这聚点只能在 $K \cap D^*$ 中, 而 $K \cap E$ 是有限集, 所以存在 $\{x_n\}$ 的子列收敛于 p, 这与 βD 中不存在非平凡的收敛序列相矛盾.

让 $Y = X/E$, $f : X \to Y$ 是自然商映射. 则 f 是闭映射.

(20.3) Y 同胚于 D 的一点紧化 ωD (即 Alexandroff 一点紧化).

记 $Y = D \cup \{e\}$, 其中 $f(E) = \{e\}$. 设 $e \in U \subset Y$. 若 $Y - U$ 是有限集, 则 $U \in \tau(Y)$. 若 $Y-U$ 是无限集, 则 $E \cap f^{-1}(Y-U) = \varnothing$, 但是 $E \cap \mathrm{cl}_X(f^{-1}(Y-U)) = E \cap \mathrm{cl}_{\beta D}(f^{-1}(Y-U)) \neq \varnothing$, 所以 $f^{-1}(Y-U) \notin \tau^c(X)$, 于是 $U \notin \tau(Y)$. 即, $U \in \tau(Y)$ 当且仅当 $Y - U$ 是有限集. 故 Y 同胚于 ωD.

由 (20.2), X 具有点可数 k 网. 因为单点集 $\omega D - D$ 不是 ωD 的 G_δ 集, 所以 ωD 不是可度量空间. 再由引理 3.1.6, Y 不具有点可数 k 网.

问题 3.1.21[345] 任一空间是否可表为具有点可数 k 网空间的闭映象?

Gruenhage, Michael 和 Tanaka[143] 曾提出问题: 度量空间的商 s 映象被开 s 映射保持否? 问题的回答是否定的.

例 3.1.22 (刘川, 林寿) 存在可度量空间的商紧映象 X 和开紧映射 $f : X \to S_{\omega_1}$.

(22.1) $\mathbb{R}$ 关于欧氏拓扑具有 ω_1 个互不相交的稠集.

对 $r \in \mathbb{R}$, 让 $r + \mathbb{Q} = \{r + q : q \in \mathbb{Q}\}$. 取定 $p_0 \in \mathbb{P}$. 则 $p_0 + \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的与 $\mathbb{Q}$ 不相交的稠集. 对 $\alpha < \omega_1$, 假设已选取了互不相交的稠集族 $\{p_\beta + \mathbb{Q} : \beta < \alpha\}$. 令 $A = \mathbb{R} - \cup\{p_\beta + \mathbb{Q} : \beta < \alpha\}$, 取 $p_\alpha \in A \cap \mathbb{P}$. 那么对 $\beta < \alpha$ 有 $(p_\alpha + \mathbb{Q}) \cap (p_\beta + \mathbb{Q}) = \varnothing$. 否则, 存在 $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, 使 $p_\alpha + r_1 = p_\beta + r_2$, 于是 $p_\alpha = p_\beta + r_2 - r_1 \in p_\beta + \mathbb{Q}$, 矛盾. 从而, 可得到 $\mathbb{R}$ 的 ω_1 个互不相交的稠集, 记为 $\{p_\alpha + \mathbb{Q} : \alpha < \omega_1\}$.

(22.2) 构造可度量空间的商紧映象 X.

对 $\alpha < \omega_1$, 记 $(p_\alpha + \mathbb{Q}) \cap \mathbb{I} = \{p_\alpha + r_n : n \in \mathbb{N}\}$. 若 $n, j \in \mathbb{N}$, 令 $x_j(p_\alpha, r_n) = (p_\alpha + r_n, 1/j), x(p_\alpha, r_n) = (p_\alpha + r_n, 0)$. 则在 $\mathbb{R}^2$ 中 $x_j(p_\alpha, r_n) \to x(p_\alpha, r_n)$. 置

$$M_\alpha = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{x_j(p_\alpha, r_n) : j \in \mathbb{N}\} \cup \{x(p_\alpha, r_n)\})) \cup \{x_\alpha(j) : \alpha < \omega_1, j \in \mathbb{N}\},$$

其中 $x_\alpha(j) \in \mathbb{R}^2$. 在 M_α 上定义下述拓扑: $x_j(p_\alpha, r_n)$ 是孤立点; $x_\alpha(j)$ 的邻域基元形如 $\{x_\alpha(j)\} \cup \{x_j(p_\alpha, r_n) : n \geqslant m\}$, $m \in \mathbb{N}$; $x(p_\alpha, r_n)$ 的邻域基元形如 $\{x(p_\alpha, r_n)\} \cup \{x_j(p_\alpha, r_n) : j \geqslant m\}$, $m \in \mathbb{N}$. 易验证, M_α 是第一可数的可数正则

空间, 于是它是可度量空间. 让 $M=\bigoplus_{\alpha<\omega_1}M_\alpha$, X 是在 $\mathbb{I}\oplus M$ 中由粘合每一 $x(p_\alpha,r_n)$ 和 $p_\alpha+r_n$ 为一点得到的商空间. 则 X 是可度量空间的商紧映象.

(22.3) 构造开紧映射 $f:X\to S_{\omega_1}$.

记 $S_{\omega_1}=\{\infty\}\cup\{x_j(\alpha):j\in\mathbb{N},\alpha<\omega_1\}$, 其中对 $\alpha<\omega_1$ 有 $x_j(\alpha)\to\infty$. 定义 $f:X\to S_{\omega_1}$ 如下: $f(\mathbb{I})=\{\infty\}$, $f(\{x_j(p_\alpha,r_n):n\in\mathbb{N}\}\cup\{x_\alpha(j)\})=\{x_j(\alpha)\}$. 则 f 是开紧映射. 这时 f 也是 s 映射.

因为 S_{ω_1} 不是度量空间的商 s 映象, 所以

(22.4) 开 s 映射未必保持度量空间的商 s 映象.

(22.5) 开紧映射未必保持 g 第一可数空间.

更进一步可问, 商紧映射是否保持具有点可数 k 网的 k 空间 [217]? 刘川 [255] 和 Shibabov[347] 都构造了具有下述性质的例子否定了这问题: 存在度量空间的正则的商紧映象 X, 使 X 的开紧映象不具有点可数 k 网.

空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为紧可数的, 若对 $K\in\mathscr{K}(X)$, $(\mathscr{P})_K$ 是可数的. 显然, 局部可数集族 $\Rightarrow$ 紧可数集族 $\Rightarrow$ 点可数集族. 易验证, 空间的点可数基必是紧可数基.

问题 3.1.23[261] 具有点可数 k 网的正则 Fréchet 空间是否具有紧可数 k 网?

3.2 Σ 空 间

在前 2 章中已初步探讨了强 Σ 空间的性质, 尤其发现它在积空间仿紧性和度量空间映象方面的突出作用. 本节的目的是依照 Nagami[309], Michael[282] 和 Okuyama[324] 的思想, 系统地论述由 (mod$k$) 网所确定的空间的性质. 特别地, 强 Σ 空间等价于具有 σ 离散闭 (mod$k$) 网的空间. 本节的内容主要由三部分组成. 第一部分, 给出 Σ 空间类的定义, 及相关的刻画. 第二部分, 建立这些空间类的相互关系, 包括 2005 年彭良雪[331] 证明的具有点 G_δ 性质的强 Σ^* 是强 Σ 空间. 第三部分, 阐述几个映射定理, 特别地, 关于强 Σ 空间的分解定理. 最后, 构造例子说明一些不蕴涵关系.

定义 3.2.1 (1) 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的拟 (mod$k$) 网 [324], 如果存在 X 的可数紧的闭覆盖 $\mathscr{H}$, 使对 $C\in\mathscr{H}$, $\{P\in\mathscr{P}:C\subset P\}$ 是 C 在 X 中的网. 这时称 $\mathscr{P}$ 是关于 $\mathscr{H}$ 的拟 (mod$k$) 网.

(2) 具有 σ 局部有限闭拟 (mod$k$) 网的空间称为 Σ 空间 [309]; 具有 σ 遗传闭包保持闭拟 (mod$k$) 网的空间称为 Σ^* 空间 [324]; 具有 σ 闭包保持闭拟 (mod$k$) 网的空间称为 $\Sigma^\sharp$ 空间 [324].

(3) 具有 σ 遗传闭包保持闭 (mod$k$) 网的空间称为强 Σ^* 空间 [324]; 具有 σ 闭包保持闭 (mod$k$) 网的空间称为强 $\Sigma^\sharp$ 空间 [282].

(4) 依照定义 1.5.3, 可类似定义对拟 (mod$k$) 网、对 (mod$k$) 网的概念.

显然, Σ 空间 $\Rightarrow$ Σ^* 空间 $\Rightarrow$ $\Sigma^\sharp$ 空间 $\Rightarrow$ σ 垫状拟 (mod$k$) 网. 由命题 1.5.4, 半层空间 $\Rightarrow$ σ 垫状 (mod$k$) 网. 若 X 分别具有由闭可数紧集 (紧集) 组成的 σ 局部有限覆盖, σ-HCP 覆盖, σ 闭包保持覆盖, 那么 X 依次是 Σ 空间 (强 Σ 空间), Σ^* 空间 (强 Σ^* 空间), $\Sigma^\sharp$ 空间 (强 $\Sigma^\sharp$ 空间). 由定义易知, 下述拓扑性质都是可加性和闭遗传性: Σ (强 Σ), Σ^* (强 Σ^*), $\Sigma^\sharp$ (强 $\Sigma^\sharp$).

下面介绍 Σ 空间类的一些等价条件. 为叙述的方便起见, 对空间 X 的点 x 及覆盖 $\mathscr{P}$, 在本节中记 $C(\mathscr{P},x)=\cap(\mathscr{P})_x$.

命题 3.2.2[324]　X 是 Σ 空间当且仅当 X 有局部有限的闭覆盖列 $\{\mathscr{F}_n\}$, 满足: 若 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$ 有 $x_n\in C(\mathscr{F}_n,x)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

证明　设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 Σ 空间 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的且 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 定义 $\mathscr{F}_n=\mathscr{P}_n\cup\{X\}$. 则 $\mathscr{F}_n$ 是 X 的局部有限闭覆盖. 若存在 $x\in X$ 和 X 中无聚点的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n\in C(\mathscr{F}_n,x)$, 取 $H\in(\mathscr{H})_x$, 那么存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $H\subset X-\{x_n:n\geqslant m\}$, 于是存在 $k\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathscr{P}_k$, 使 $H\subset P\subset X-\{x_n:n\geqslant m\}$. 取 $j\geqslant\max\{m,k\}$. 那么 $x_j\in C(\mathscr{F}_j,x)\subset P\subset X-\{x_j\}$, 矛盾.

反之, 不妨设 $\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}$ 且 $\mathscr{F}_n$ 关于有限交封闭. 则 $C(\mathscr{F}_n,x)\in\mathscr{F}_n$. 置 $\mathscr{H}=\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C(\mathscr{F}_n,x):x\in X\}$. 由收敛引理, $\mathscr{H}$ 是 X 的由闭可数紧集组成的覆盖, 且 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 (mod$k$) 网. 故 X 是 Σ 空间.

命题 3.2.3[313]　X 是 $\Sigma^\sharp$ 空间当且仅当 X 存在 $\Sigma^\sharp$ 函数, 即 X 存在 g 函数, 满足

(1) 对 $x,y\in X$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 若 $x\in g(n,y)$, 则 $g(n,x)\subset g(n,y)$;

(2) 对 $x\in X$ 及 X 的序列 $\{x_n\}$, 若 $x\in g(n,x_n)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

证明　必要性. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 $\Sigma^\sharp$ 空间 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是闭包保持的. 定义 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 为

$$g(n,x)=X-\cup\{P\in\mathscr{P}_i:i\leqslant n,x\notin P\}.$$

显然, g 是满足条件 (1) 的 g 函数. 若存在 $x\in X$ 及序列 $\{x_n\}$, 使 $x\in g(n,x_n)$, 且 $\{x_n\}$ 无聚点, 则存在 $H\in(\mathscr{H})_x,m,k\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathscr{P}_k$, 使 $H\subset P\subset X-\{x_n:n\geqslant m\}$. 取 $j\geqslant\max\{m,k\}$. 那么 $g(j,x_j)\subset X-P\subset X-\{x\}$, 矛盾. 故 g 也满足条件 (2).

充分性. 设 g 是 X 的 $\Sigma^\sharp$ 函数. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{P}_n=\{X-g(n,A):A\subset X\}.$$

由 (1), $\mathscr{P}_n$ 是闭包保持的闭集族, 且对 $x \in X$ 有 $C(\mathscr{P}_n, x) \in \mathscr{P}_n$. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \in C(\mathscr{P}_n, x)$, 则 $x \in g(n, x_n)$, 于是 $\{x_n\}$ 有聚点. 置 $\mathscr{H} = \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C(\mathscr{P}_n, x) : x \in X\}$. 由收敛引理, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 $(\mathrm{mod}k)$ 网. 故 X 是 $\Sigma^\sharp$ 空间.

问题 3.2.4　具有下述性质的空间 X 是否是 $\Sigma^\sharp$ 空间? X 有闭包保持的闭覆盖列 $\{\mathscr{F}_n\}$ 满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \in C(\mathscr{F}_n, x)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

命题 3.2.5　X 具有 σ 垫状拟 $(\mathrm{mod}k)$ 网当且仅当存在 X 的由可数紧闭集组成的覆盖 $\mathscr{H}$ 和 g 函数, 满足: 对 $H \in \mathscr{H}$ 及 X 的序列 $\{x_n\}$, 若 $H \cap g(n, x_n) \neq \varnothing$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点在 H 中.

证明　必要性. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的 σ 垫状拟 $(\mathrm{mod}k)$ 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是垫状族. 定义 X 的 g 函数 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$ 如下:

$$g(n, x) = X - \overline{\cup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}_i, i \leqslant n, x \notin P_2\}}.$$

对 $H \in \mathscr{H}$ 及 X 的序列 $\{x_n\}$, 若 $H \cap g(n, x_n) \neq \varnothing$ 且 $\{x_n\}$ 在 H 中无聚点, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $H \cap \overline{\{x_n : n \geqslant m\}} = \varnothing$. 若不然, 对 $k \in \mathbb{N}$, 令 $F_k = \overline{\{x_n : n \geqslant k\}}$. 则 $\{H \cap F_k\}$ 是 H 的非空递减的闭集列, 所以存在 $h \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(H \cap F_k)$, 那么 h 是 $\{x_n\}$ 在 H 的聚点, 矛盾. 从而存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $H \subset X - \overline{\{x_n : n \geqslant m\}}$, 于是存在 $i \in \mathbb{N}$ 和 $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}_i$, 使 $H \subset P_1 \subset P_2 \subset X - \overline{\{x_n : n \geqslant m\}}$. 取 $j \geqslant \max\{m, i\}$. 那么 $g(j, x_j) \subset X - P_1 \subset X - H$, 矛盾.

充分性. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$P(n, U) = X - g(n, X - U),\ U \in \tau;$$
$$\mathscr{P}_n = \{(P(n, U), U) : U \in \tau\}.$$

则 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的垫状族. 若 $H \in \mathscr{H}, H \subset U \in \tau$, 如果每一 $P(n, U) \not\supset H$, 则存在 $X - U$ 的序列 $\{x_n\}$, 使 $H \cap g(n, x_n) \neq \varnothing$, 于是 $\{x_n\}$ 有聚点在 $H - U$ 中, 矛盾. 因此 X 具有 σ 垫状拟 $(\mathrm{mod}k)$ 网.

由此, 具有 σ 垫状拟 $(\mathrm{mod}k)$ 网的空间是 β 空间.

定理 3.2.6[189]　下述条件等价:

(1) X 是强 $\Sigma^\sharp$ 空间;

(2) X 是次亚紧的 $\Sigma^\sharp$ 空间;

(3) X 是等紧的 $\Sigma^\sharp$ 空间.

证明　利用 Junnila 关于次亚紧性的刻画: 每一定向开覆盖有 σ 闭包保持的闭加细 (见附录 A 定理 4.8), 强 $\Sigma^\sharp$ 空间是次亚紧空间. 其余事实是显然的.

问题 3.2.7　具有 σ 垫状 $(\mathrm{mod}k)$ 网的空间是否是次亚紧空间?

该问题与下述 Junnila-Katuta 问题 [189, 199] 相关: 每一定向开覆盖具有 σ 垫状加细的空间是否是次亚紧空间? 若 Junnila-Katuta 问题的回答是肯定的, 则问

题 3.2.7 的回答也是肯定的.

对强 Σ^* 空间, 有与定理 3.2.6 相平行的结论.

引理 3.2.8[63] 如果空间 X 的开集族 $\mathscr{U}$ 覆盖 $K\in\mathscr{K}(X)$, 则存在 $O\in\tau$, 使 $K\subset O$ 且 $\mathscr{U}_{|O}$ 在 O 中有有限的闭加细.

证明 存在 $\mathscr{U}$ 的有限集 $\{U_i\}_{i\leqslant n}$ 覆盖 K. 对 $x\in K$, 存在 $i(x)\leqslant n$, 使 $x\in U_{i(x)}$. 让 $F_x=K-U_{i(x)}$. 存在 $V_x,W_x\in\tau$, 使 $x\in V_x, F_x\subset W_x$ 且 $V_x\cap W_x=\varnothing$. 令 $G_x=W_x\cup U_{i(x)}$. 那么 $K\subset G_x\in\tau$. 取 K 的有限集 $\{x_j\}_{j\leqslant m}$, 使 $K\subset\bigcup_{j\leqslant m}V_{x_j}$. 置

$$O=(\bigcap_{j\leqslant m}G_{x_j})\cap(\bigcup_{j\leqslant m}V_{x_j})\cap(\bigcup_{i\leqslant n}U_i),$$

则 $K\subset O\in\tau$. 对 $j\leqslant m$, 设 $P_j=\mathrm{cl}_O(V_{x_j}\cap O)$. 那么 P_j 是 O 的闭集, $O=\bigcup_{j\leqslant m}P_j$, 且 $P_j-U_{i(x_j)}\subset(G_{x_j}-U_{i(x_j)})\cap\mathrm{cl}_X(V_{x_j})\subset W_{x_j}\cap\mathrm{cl}_X(V_{x_j})=\varnothing$, 因而 $P_j\subset U_{i(x_j)}$. 于是 $\{P_j\}_{j\leqslant m}$ 是 $\mathscr{U}_{|O}$ 在 O 中的闭加细.

定理 3.2.9[63] 下述条件等价:

(1) X 是强 Σ^* 空间;

(2) X 是次仿紧的 Σ^* 空间;

(3) X 是等紧的 Σ^* 空间.

证明 只须证强 Σ^* 空间是次仿紧空间. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ-HCP 闭 $(\mathrm{mod}k)$ 网. 如果 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 对 $x\in X$, 取定 $K_x\in(\mathscr{K})_x$. 由引理 3.2.8, 存在 $O_x\in\tau$, 使 $K_x\subset O_x$ 且 $\mathscr{U}_{|O_x}$ 在 O_x 中有有限的闭加细 $\mathscr{F}_x$, 从而存在 $P_x\in\mathscr{P}$, 满足 $K_x\subset P_x\subset O_x$. 让 $\mathscr{F}=\{P_x\cap F:x\in X,F\in\mathscr{F}_x\}$. 则 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 闭包保持加细. 对 $x\in X$ 和 $F\in\mathscr{F}_x$, 如果 $z\in X-(P_x\cap F)$, 置

$$L_z=\begin{cases}X-P_x, & z\in X-P_x,\\ O_x-F, & z\in P_x-F,\end{cases}$$

那么 $z\in L_z\in\tau$ 且 $L_z\cap P_x\cap F=\varnothing$, 于是 $P_x\cap F$ 是 X 的闭集. 所以 $\mathscr{U}$ 有 σ 闭包保持的闭加细, 故 X 是次仿紧空间.

下述定理实现了本章开头陈述的愿望.

定理 3.2.10[63, 192] 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 离散的闭 $(\mathrm{mod}k)$ 网;

(2) X 是强 Σ 空间;

(3) X 是次仿紧的 Σ 空间;

(4) X 是等紧的 Σ 空间.

证明 由定理 3.2.9, 只须证 (2) $\Rightarrow$ (1). 让 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 局部有限的闭 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的. 对 $n\in\mathbb{N}$, 因为 X 是次仿紧空间, 存在 X 的 σ 离散的闭覆盖 $\mathscr{F}_n$, 使 $\mathscr{F}_n$ 的每一元仅交 $\mathscr{P}_n$ 的有限个元, 那么 $\mathscr{P}_n\wedge\mathscr{F}_n$ 是 σ 离散且闭的. 置 $\mathscr{P}=\{\cap\mathscr{F}:\mathscr{F}\in(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n\wedge\mathscr{F}_n)^{<\omega}\}$. 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 离散闭集族且关于有限交封闭. 对 $x\in K\in\mathscr{K}$, 若 $K\subset U\in\tau$, 则存在 $n\in\mathbb{N}, P\in\mathscr{P}_n$ 和 $F\in\mathscr{F}_n$, 使 $x\in F$ 且 $K\subset P\subset U$, 于是 $P\cap F\in\mathscr{P}$ 且 $x\in P\cap F\subset U$, 因而 $\mathscr{P}$ 是 X 的几乎 (mod$k$) 网. 由引理 1.5.13, $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 离散的闭 (mod$k$) 网.

问题 3.2.11[372] Σ 空间是否具有 σ 离散的闭拟 (mod$k$) 网?

本节第二部分, 讨论 Σ 空间类之间的关系.

推论 2.11.8 建立了具有可数 (mod$k$) 网空间与可分度量空间的逆紧逆象的关系. 下面将进一步探讨它的等价条件. 首先注意到, 对引理 1.5.13, 若将其几乎 (mod$k$) 网换成所谓的几乎拟 (mod$k$) 网, 那么可得到 X 的由可数紧集组成的闭覆盖 $\mathscr{H}$, 满足相应条件, 即有下述引理.

引理 3.2.12 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数闭集族. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的几乎拟 (mod$k$) 网, 则存在 X 的可数紧的闭覆盖 $\mathscr{H}$, 满足

(1) $\mathscr{P}$ 是关于 $\mathscr{H}$ 的拟 (mod$k$) 网;

(2) 若 $x\in P\in\mathscr{P}$, 那么有 $H\in\mathscr{H}$, 使 $x\in H\subset P$.

引理 3.2.13[221] 设 $\mathscr{P}$ 是 $\aleph_1$ 紧空间 X 的弱遗传闭包保持集族. 置

$$E=\{x\in X:|(\mathscr{P})_x|>\aleph_0\}.$$

那么

(1) $\{P-E:P\in\mathscr{P}\}$ 是可数族;

(2) E 是 X 的可数闭离散子空间.

证明 (1) 若 $\{P-E:P\in\mathscr{P}\}$ 不可数, 则存在 $\mathscr{P}$ 的不可数集 $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 和 X 的子集 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$, 使 $x_\alpha\in P_\alpha-E$. 由 $\mathscr{P}$ 的弱遗传闭包保持性及 X 的 $\aleph_1$ 紧性, 不妨设存在 $x\in X-E$, 使每一 $x_\alpha=x$, 这与 E 的定义相矛盾.

(2) 对 $Z\subset E$ 且 $|Z|\leqslant\aleph_1$, 记 $Z=\{x_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 由 E 的定义及良序定理, 应用超限归纳法, 可选取 $\mathscr{P}$ 的子集 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使 P_α 互不相同且 $x_\alpha\in P_\alpha$, 于是 Z 是 X 的可数闭离散子空间. 从而 E 是 X 的可数闭离散子空间.

定理 3.2.14 X 具有可数闭拟 (mod$k$) 网当且仅当 X 是 $\aleph_1$ 紧的 Σ^* 空间.

证明 必要性[383]. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的可数闭拟 (mod$k$) 网. 若 X 存在不可数的闭离散子空间 Z, 不妨记 $Z=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 对 $\alpha<\omega_1$, 取 $C_\alpha\in\mathscr{H}$, 使 $x_\alpha\in C_\alpha$. 那么 $|Z\cap C_\alpha|<\aleph_0$. 于是存在 $\beta(\alpha)<\omega_1$, $P_\alpha\in\mathscr{P}$, 使 $C_\alpha\subset P_\alpha\subset X-\{x_\beta:\beta(\alpha)<\beta<\omega_1\}$. 重排 $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 为 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 存

在 $\beta_n<\omega_1$, 使 $P_n\subset X-\{x_\beta:\beta_n<\beta<\omega_1\}$. 取 $\gamma<\omega_1$, 使 $\gamma>\sup\{\beta_n:n\in\mathbb{N}\}$. 那么 $x_\gamma\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}P_n\subset X-\{x_\gamma\}$, 矛盾. 故 X 是 $\aleph_1$ 紧空间.

充分性. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 $\aleph_1$ 紧空间 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$E_n=\{x\in X:|(\mathscr{P}_n)_x|>\aleph_0\},$$
$$\mathscr{R}_n=\{\overline{P-E_n}:P\in\mathscr{P}_n\}\cup\{\{x\}:x\in E_n\}.$$

由引理 3.2.13, $|\mathscr{R}_n|\leqslant\aleph_0$. 令

$$\mathscr{F}=\{\cap\mathscr{R}:\mathscr{R}\in(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{R}_n)^{<\omega}\}.$$

那么 $|\mathscr{F}|\leqslant\aleph_0$, 并且 $\mathscr{F}$ 是关于有限交封闭的闭集族. 对 $x\in C\in\mathscr{H}$ 及 $C\subset U\in\tau$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathscr{P}_n$, 使 $C\subset P\subset U$. 定义

$$F=\begin{cases}\{x\}, & x\in E_n,\\ \overline{P-E_n}, & x\in X-E_n.\end{cases}$$

那么 $F\in\mathscr{F}$ 且 $x\in F\subset U$. 故 $\mathscr{F}$ 是 X 的几乎拟 (mod$k$) 网. 由引理 3.2.12, $\mathscr{F}$ 是 X 的闭拟 (mod$k$) 网.

推论 3.2.15[324] 下述条件等价:

(1) X 具有可数闭 (mod$k$) 网;

(2) X 是 Lindelöf 的 Σ^* 空间;

(3) X 是 $\aleph_1$ 紧的强 Σ^* 空间.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 X 具有可数闭 (mod$k$) 网 $\mathscr{P}$. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 记

$$\{P\in\mathscr{P}:\text{ 存在 }\mathscr{V}\in\mathscr{U}^{<\omega},\text{ 使 }P\subset\cup\mathscr{V}\}=\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

对 $n\in\mathbb{N}$, 取定 $\mathscr{U}_n\in\mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $P_n\subset\cup\mathscr{U}_n$. 那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数子覆盖. 故 X 是 Lindelöf 空间.

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 由定理 3.2.14 和 3.2.6 知 (3) $\Rightarrow$ (1).

在正则空间中, 第一可数空间等价于具有点 G_δ 性质的 q 空间. 在讨论怎样的 Σ^* 空间是 Σ 空间时, 下面将证明 q 空间或具有点 G_δ 性质的强 Σ^* 空间是 Σ 空间.

引理 3.2.16[226] 设 $\mathscr{P}$ 是 q 空间 X 的遗传闭包保持的闭集族. 置

$$D(\mathscr{P})=\{x\in X:|(\mathscr{P})_x|\geqslant\aleph_0\},$$
$$\mathscr{R}(\mathscr{P})=\{\overline{P-D(\mathscr{P})}:P\in\mathscr{P}\}\cup\{\{x\}:x\in D(\mathscr{P})\}.$$

则 $\mathscr{R}(\mathscr{P})$ 是 X 的局部有限集族.

证明 设 g 是 X 的 q 函数. 先证 $D(\mathscr{P})$ 是 X 的闭离散子空间. 否则, 存在 $A\subset D(\mathscr{P})$ 和 $x\in\overline{A}-A$. 选取 A 中非平凡的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n\in g(n,x)$. 再选取 $\mathscr{P}$ 中由不同元组成的子集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $x_n\in P_n$. 则 $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的闭

离散集, 矛盾. 为证 $\mathscr{R}(\mathscr{P})$ 是 X 的局部有限集族, 只须证 $\{\overline{P-D(\mathscr{P})}:P\in\mathscr{P}\}$ 是 X 的点有限集族. 若不然, 则存在 $y\in X$ 和 $\mathscr{P}$ 的可数集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{P_n-D(\mathscr{P})}$, 从而 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{P_n-\{y\}}$, 于是可选取 X 中非平凡的序列 $\{y_n\}$, 使 $y_n\in g(n,y)\cap(P_n-\{y\})$, 矛盾. 故 $\mathscr{R}(\mathscr{P})$ 是 X 的局部有限集族.

命题 3.2.17 Σ^* 的 q 空间是 Σ 空间.

证明 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 q 空间 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP. 采用引理 3.2.16 的记号, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$ 是 X 的 σ 局部有限闭集族. 置

$$\mathscr{F}=\{\cap\mathscr{R}:\mathscr{R}\in(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{R}(\mathscr{P}_n))^{<\omega}\}.$$

那么 $\mathscr{F}$ 是 X 的关于有限交封闭的 σ 局部有限闭集族. 由定理 3.2.14 中充分性的证明方法, $\mathscr{F}$ 是 X 的几乎拟 (mod$k$) 网. 再由引理 3.2.12, $\mathscr{F}$ 是 X 的闭拟 (mod$k$) 网. 故 X 是 Σ 空间.

引理 3.2.18[330] 具有点 G_δ 性质的次亚紧空间的闭离散集是 G_δ 集.

证明 设 F 是具有点 G_δ 性质的次亚紧空间 X 的闭离散集. 对 $x\in F$, 存在 X 的递减的开集列 $\{V_{xn}\}$, 使 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_{xn}=\{x\}$ 且 $F\cap V_{xn}=\{x\}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{U}_n=\{V_{xn}:x\in F\}\cup\{X-F\}$. 则 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的开覆盖. 存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_{nm}\}$ 满足: 置 $\mathscr{V}_n=\mathscr{U}_n\wedge(\bigwedge_{i+j\leqslant n}\mathscr{U}_{ij})$, 则 $\{\mathscr{U}_{nm}\}$ 是 $\mathscr{V}_n$ 的 θ 开加细序列. 对 $n,m\in\mathbb{N}$, 令 $O_{nm}=\cup(\mathscr{U}_{nm})_F$. 则 $F\subset O_{nm}\in\tau$.

设 $x\in\bigcap_{n,m\in\mathbb{N}}O_{nm}$. 记 $\mathscr{F}_{nm}=\{U\in\mathscr{U}_{nm}:x\in U\not\subset X-F\}$. 由 $\mathscr{U}_{nm}$ 的构造, 存在有限集列 $\{\mathscr{F}_{n_km_k}\}$ 满足: $\mathscr{F}_{n_{k+1}m_{k+1}}$ 部分加细 $\mathscr{F}_{n_km_k}\wedge\mathscr{U}_{k+1}$ 且 $n_k<n_{k+1}$. 由 König 引理, 存在递减的集列 $\{U_k\}$, 使 $U_k\in\mathscr{F}_{n_km_k}$. 取定 $y\in U_1\cap F$. 则 $U_k\cap F=\{y\}$ 且 $U_k\subset V_{yn_k}$. 从而 $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}U_k\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}}V_{yn_k}=\{y\}\subset F$. 故, $F=\bigcap_{n,m\in\mathbb{N}}O_{nm}$.

引理 3.2.19[330] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的闭包保持的闭覆盖. 令 $F=\{x\in X:|C(\mathscr{P},x)|<\aleph_0\}$. 若 X 的闭离散集是 G_δ 集, 则 F 是 X 的 σ 闭离散集.

证明 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $F_n=\{x\in X:|C(\mathscr{P},x)|\leqslant n\}$. 只须证 F_n 是 σ 闭离散集.

(19.1) F_n 是 X 的闭集, F_1 是 X 的离散集.

对 $y\in X$, 让 $U_y=X-\cup\{P\in\mathscr{P}:y\notin P\}$. 那么 $y\in U_y\in\tau$ 且若 $x\in U_y$, 则 $C(\mathscr{P},y)\subset C(\mathscr{P},x)$. 于是如果 $y\in X-F_n$, 则 $U_y\cap F_n=\varnothing$, 因而 F_n 是闭集. 由于 $U_y\cap F_1\subset\{y\}$, 所以 F_1 还是 X 的离散集.

(19.2) $F_{n+1}-F_n$ 是 X 的离散集.

设 $x\in F_{n+1}-F_n$. 若 $y\in(F_{n+1}-F_n)-C(\mathscr{P},x)$, 则 $C(\mathscr{P},x)\not\subset C(\mathscr{P},y)$, 所以存在 $P_y\in\mathscr{P}$, 使 $y\in P_y\subset X-\{x\}$. 定义 $V_x=X-\cup\{P_y:y\in(F_{n+1}-F_n)-$

$C(\mathscr{P},x)\}$. 则 $x\in V_x\in\tau$ 且 $V_x\cap(F_{n+1}-F_n)\subset C(\mathscr{P},x)$. 故 $F_{n+1}-F_n$ 是 X 的离散集.

(19.3) F_n 是 σ 闭离散集.

因为 F_1 是 X 的闭离散集, 所以 F_1 是 X 的 G_δ 集, 于是存在 X 的闭集列 $\{H_m\}$, 使 $F_2-F_1=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}H_m$. 由于 $H_m\cap(F_2-F_1)=H_m\cap F_2$ 是 X 的闭离散集, 从而 F_2-F_1 是 X 的 σ 闭离散集. 因此 F_2 是 X 的 σ 闭离散集.

对 $m\in\mathbb{N}$, $H_m\cap F_2$ 是 X 的 G_δ 集, 所以存在 X 的闭集列 $\{H_{mk}\}$, 使 $F_3-(H_m\cap F_2)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}H_{mk}$. 由于 $H_{mk}\cap(F_3-F_2)=H_{mk}\cap F_3$ 是 X 的闭离散集, 从而 $F_3-F_2=\bigcup_{m,k\in\mathbb{N}}H_{mk}$ 是 X 的 σ 闭离散集. 因此 F_3 是 X 的 σ 闭离散集.

通过归纳法, 可证明 F_n 是 σ 闭离散集.

引理 3.2.20[383] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的遗传闭包保持集族. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{P}_n=\{P_1\cap P_2\cdots\cap P_n:P_i\in\mathscr{P},i\leqslant n\}.$$

则 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的遗传闭包保持集族.

证明 显然, $n=1$ 时结论成立. 设当 $n=k$ 时结论成立, 对 $n=k+1$, 记

$$\mathscr{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\},\ \mathscr{P}_k=\{Q_\beta:\beta\in\Gamma\}.$$

那么 $\mathscr{P}_n=\mathscr{P}\wedge\mathscr{P}_k$. 对 $H_{\alpha\beta}\subset P_\alpha\cap Q_\beta\in\mathscr{P}_n$, 有

$$\begin{aligned}\overline{\cup\{H_{\alpha\beta}:(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Gamma\}}&=\cup\{\overline{\cup\{H_{\alpha\beta}:\beta\in\Gamma\}}:\alpha\in\Lambda\}\\&=\cup\{\overline{H}_{\alpha\beta}:(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Gamma\}.\end{aligned}$$

故 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的 HCP 集族.

引理 3.2.21[331] 设 X 是 Σ^* 空间. 若 X 的闭离散集是 G_δ 集, 则 X 是 Σ 空间.

证明 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP 覆盖且 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 由命题 3.2.2 必要性的证明, 有

(21.1) 若 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$ 有 $x_n\in C(\mathscr{P}_n,x)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

对 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned}&D_n=\{x\in X:|(\mathscr{P}_n)_x|\geqslant\aleph_0\},\ D=\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n;\\&G_n=\{x\in X:|C(\mathscr{P}_n,x)|<\aleph_0\},\ G=\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n;\\&C(x)=\textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C(\mathscr{P}_n,x),x\in X.\end{aligned}$$

(21.2) G 是 X 的 σ 闭离散集且 $D_n\subset G$.

由引理 3.2.19, G 是 σ 闭离散集. 若 $x\in D_n-G$, 则 $(\mathscr{P}_n)_x$ 是无限的, 且对 $m\geqslant n,C(\mathscr{P}_m,x)$ 是无限的. 从而可归纳地选取 $x_m\in C(\mathscr{P}_m,x)-\{x_i:n\leqslant i<m\}$ 和 $P_m\in(\mathscr{P}_n)_x-\{P_i:n\leqslant i<m\}$. 则 $\{x_i:i\geqslant n\}$ 是 X 的闭离散集, 与 (21.1) 相矛盾. 故 $D_n\subset G$.

(21.3) D_n 是 X 的 G_δ 集.

对 $x \in X$, 存在 X 的递减的开集列 $\{g(n,x)\}$, 使 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,x) = \{x\}$. 对 $n,m,i,j \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{Q}_{nm} = \{\bigcap_{k\leqslant m} P_k : P_k \in \mathscr{P}_n, k \leqslant m\},$$
$$\mathscr{R}_{nmij} = \{Q - \bigcup_{d\in Q\cap D_i} g(j,d) : Q \in \mathscr{Q}_{nm}\}.$$

则 $\mathscr{Q}_{nm}$ 和 $\mathscr{R}_{nmij}$ 都是 X 的 HCP 闭集族. 对 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$D_i \subset \bigcap_{n,m,j\in\mathbb{N}} (X - \cup\{R \in \mathscr{R}_{nmij} : R \cap D_i = \varnothing\}) \subset G.$$

事实上, 设 $x \in X - G$. 由于 $\mathscr{P}_n$ 在 D_n 的每一点都不是点有限的, 所以 D_n 的每一可数集是 X 的闭离散集, 于是存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $C(\mathscr{P}_n, x) \cap D_i$ 是有限集. 取 $m \in \mathbb{N}$, 使 $|(\mathscr{P}_n)_x| = m$. 那么 $C(\mathscr{P}_n, x) \in \mathscr{Q}_{nm}$. 令 $F = C(\mathscr{P}_n, x) \cap D_i$. 则存在 $j \in \mathbb{N}$, 使 $x \notin \bigcup_{d\in F} g(j,d)$, 因而 $x \in C(\mathscr{P}_n, x) - \bigcup_{d\in F} g(j,d) \in \mathscr{R}_{nmij}$ 且 $(C(\mathscr{P}_n, x) - \bigcup_{d\in F} g(j,d)) \cap D_i = \varnothing$.

由 (21.2), 存在 X 的闭集列 $\{A_k\}$, 使 $G - D_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. 因此

$$D_i = \bigcap_{n,m,j\in\mathbb{N}} (X - \cup\{R \in \mathscr{R}_{nmij} : R \cap D_i = \varnothing\}) \cap (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X - A_k))$$

是 X 的 G_δ 集.

(21.4) X 是 Σ 空间.

记 $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n^*$, 其中 D_n^* 是 X 的闭离散集, $D_n^* \subset D_{n+1}^*$. 再记 $D_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} O_{nm}$, 其中 O_{nm} 是 X 的开集. 置 $\mathscr{P}_{nm} = \{P - O_{nm} : P \in \mathscr{P}_n\} \cup \{X\}$. 则 $\mathscr{P}_{nm}$ 是局部有限闭覆盖. 事实上, 对 $x \in X$, 不妨设 $x \in X - O_{nm} \subset X - D_n$, 则 $\mathscr{P}_{nm}$ 在 x 是局部有限的.

令 $\mathscr{G}_n = \{\{x\} : x \in D_n^*\} \cup \{X\}$. 则 $\mathscr{G}_n$ 是局部有限闭覆盖. 再令

$$\mathscr{P}^* = (\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_{nm}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n,$$

其中 $\mathscr{F}_n$ 是局部有限闭覆盖.

设 X 的点 x 及序列 $\{x_i\}$ 满足 $x_i \in C(\mathscr{F}_i, x)$. 若 $x \in D$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $C(\mathscr{G}_n, x) = \{x\}$, 于是 $\{x_i\}$ 收敛于 x. 若 $x \in X - D$, 那么 $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, 所以对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $m_n \in \mathbb{N}$, 使 $x \notin O_{nm_n}$, 从而 $C(\mathscr{P}_{nm_n}, x) \subset C(\mathscr{P}_n, x)$. 由 (21.1), $\{x_i\}$ 有聚点. 再由命题 3.2.2, X 是 Σ 空间.

由定理 3.2.10, 引理 3.2.18 和 3.2.21, 有

定理 3.2.22[331]　具有点 G_δ 性质的强 Σ^* 空间是强 Σ 空间.

问题 3.2.23[324]　perfect 的 $\Sigma^\sharp$ 空间是否是 Σ 空间?

定义 3.2.24[96] 空间 (X,τ) 的邻域指派是函数 $\phi: X \to \tau$, 满足 $x \in \phi(x)$ $(\forall x \in X)$. X 称为 D 空间, 如果对 X 的每一邻域指派 ϕ, 存在 X 的闭离散集 D, 使 $\{\phi(d): d \in D\}$ 覆盖 X.

van Douwen 和 Pfeffer[97] 提出了 D 空间的一些有趣问题, 其中正则的 Lindelöf 空间是否是 D 空间仍是尚未解决的问题. 已发现不少的广义度量空间是 D 空间 [29].

定理 3.2.25[243] 具有 σ 垫状 (mod$k$) 网的空间是 D 空间.

证明 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是空间 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 垫状 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是良序的垫状族且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. 让 ϕ 是 X 的任意邻域指派. 首先, 对 $n \in \mathbb{N}$, 归纳定义 $D_n \subset X$ 如下.

置 $D_0 = \varnothing$. 设对所有 $0 \leqslant m < n$, 已定义了 $D_m \subset X$.

为了定义 D_n, 再对序数 α 归纳定义有限集 $D^n_\alpha \subset X$ 如下.

置 $D^n_0 = \varnothing$. 设对所有 $0 \leqslant \beta < \alpha$, 已定义了 D^n_β. 让

$$U = \cup\{\phi(d) : d \in (\cup\{D^n_\beta : \beta < \alpha\}) \cup D_{n-1}\}.$$

记 R^n_α 为断言: 存在 $K \in \mathscr{K}, (P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n$ 和 $\{x_1, \cdots, x_k\} \subset K - U$, 使

$$K \subset P_1 \subset P_2 \subset U \cup \phi(x_1) \cup \cdots \cup \phi(x_k).$$

如果 R^n_α 不成立, 关于 α 的归纳完成. 否则, 让 (P_1, P_2) 是 $\mathscr{P}_n$ 中满足条件 R^n_α 的第一个元, 且置 $D^n_\alpha = \{x_1, \cdots, x_k\}$. 让 γ_n 是使 R^n_α 不成立的第一个序数 α. 定义 $D_n = (\bigcup_{\alpha<\gamma_n} D^n_\alpha) \cup D_{n-1}$.

其次, 令 $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. 下面证明关于集 D, X 是 D 空间.

(25.1) $X = \bigcup_{d\in D} \phi(d)$.

否则, 存在 $K \in \mathscr{K}$, 使 $K - \bigcup_{d\in D} \phi(d) \neq \varnothing$. 置 $L = K - \bigcup_{d\in D} \phi(d)$. 则 L 是 X 的非空紧集. 因为 ϕ 是 X 的邻域指派, 存在 L 的有限集 $\{x_1, \cdots, x_k\}$, 使 $L \subset \phi(x_1) \cup \cdots \cup \phi(x_k)$. 记 $M = K - (\phi(x_1) \cup \cdots \cup \phi(x_k))$. 则 $M \subset K - L \subset \bigcup_{d\in D} \phi(d)$. 由 M 的紧性, 存在 $j \in \mathbb{N}$, 使 $M \subset \bigcup_{d\in D_j} \phi(d)$, 于是 $K \subset \phi(x_1) \cup \cdots \cup \phi(x_k) \cup (\bigcup_{d\in D_j} \phi(d))$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 (mod$k$) 网, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}_m$, 使

$$K \subset P_1 \subset P_2 \subset \phi(x_1) \cup \cdots \cup \phi(x_k) \cup (\bigcup_{d\in D_j} \phi(d)).$$

置 $n = \max\{j+1, m\}, U = \cup\{\phi(d) : d \in D_{n-1}\}$. 则 $\bigcup_{d\in D_j} \phi(d) \subset U, (P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n$ 且 $\{x_1, \cdots, x_k\} \subset K - U$. 于是断言 R^n_1 成立, 所以 $D^n_1 = \{x_1, \cdots, x_k\}$, 且 $K \subset P_1 \subset P_2 \subset \bigcup_{d\in D} \phi(d)$, 矛盾.

(25.2) D_n 是 X 的闭离散集.

D_0 是 X 的闭离散集. 假设 D_{n-1} 是 X 的闭离散集. 为了证明 D_n 是 X 的闭离散集, 只须证 $\bigcup_{\alpha<\gamma_n} D_\alpha^n$ 是闭离散的. 对 $\alpha<\gamma_n$, 让 $(P_{1\tilde{\alpha}}^n, P_{2\tilde{\alpha}}^n)$ 是 $\mathscr{P}_n$ 中满足断言 R_α^n 的第一个元. 设 $x \in \overline{\bigcup_{\alpha<\gamma_n} D_\alpha^n}$. 因为 $\bigcup_{\alpha<\gamma_n} D_\alpha^n \subset \bigcup_{\alpha<\gamma_n} P_{1\tilde{\alpha}}^n$, 所以

$$x \in \bigcup_{\alpha<\gamma_n} P_{2\tilde{\alpha}}^n \subset \cup\{\phi(d) : d \in (\cup\{D_\alpha^n : \alpha<\gamma_n\}) \cup D_{n-1}\}.$$

又因为 $D_\alpha^n \cap \bigcup_{d\in D_{n-1}} \phi(d) = \varnothing$, 于是 $x \in \cup\{\phi(d) : d \in \bigcup_{\alpha<\gamma_n} D_\alpha^n\}$. 让 α_x 是 γ_n 中满足 $x \in \cup\{\phi(d) : d \in D_\alpha^n\}$ 的最小元 α. 置

$$V = \cup\{\phi(d) : d \in D_{\alpha_x}^n\} - \overline{\cup\{P_{1\tilde{\alpha}}^n : \alpha<\alpha_x\}}.$$

则 V 是 x 的开邻域, 且 $V \cap (\bigcup_{\alpha<\gamma_n} D_\alpha^n) \subset D_{\alpha_x}^n$ 是有限的. 因而, $\bigcup_{\alpha<\gamma_n} D_\alpha^n$ 是闭离散的.

(25.3) D 是 X 的闭离散集.

对 $x \in X$, 由 (25.1), 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $x \in \bigcup_{d\in D_n} \phi(d)$. 因为 D_n 是闭离散的, 存在 x 的开邻域 W, 使 $W \subset \bigcup_{d\in D_n} \phi(d)$ 且 W 至多含 D_n 中的一个点. 于是

$$W \cap D \subset ((\bigcup_{d\in D_n} \phi(d)) \cap (D - D_n)) \cup (W \cap D_n).$$

对 $y \in D - D_n$, 存在 $m > n$ 和 $\alpha < \gamma_m$, 使 $y \in D_\alpha^m$. 令

$$U = \cup\{\phi(d) : d \in (\cup\{D_\beta^m : \beta<\alpha\}) \cup D_{m-1}\}.$$

则 $\bigcup_{d\in D_n} \phi(d) \subset U$, 且 $D_\alpha^m \cap U = \varnothing$. 于是 $y \notin \bigcup_{d\in D_n} \phi(d)$. 因而, $(D - D_n) \cap (\bigcup_{d\in D_n} \phi(d)) = \varnothing$. 这表明 W 含 D 中至多一个点. 故, D 是闭离散的.

本节第三部分, 介绍 Σ 空间类的映射定理. 下述命题可直接验证.

命题 3.2.26 设映射 $f: X \to Y$.

(1) 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 (mod$k$) 网, 则 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的关于 $f(\mathscr{K})$ 的 (mod$k$) 网.

(2) 若 f 是闭映射, 并且 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的拟 (mod$k$) 网, 则 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的关于 $f(\mathscr{H})$ 的拟 (mod$k$) 网.

由于可数紧空间的局部有限集族是有限的, 所以逆可数紧映射保持局部有限集族.

推论 3.2.27 设映射 $f: X \to Y$.

(1) 若 f 是逆可数紧映射, 如果 X 是 Σ 空间, 则 Y 是 Σ 空间.

(2) 若 f 是闭映射, 如果 X 是 Σ^* 空间 (强 Σ^* 空间, $\Sigma^\sharp$ 空间, 强 $\Sigma^\sharp$ 空间), 则 Y 是 Σ^* 空间 (强 Σ^* 空间, $\Sigma^\sharp$ 空间, 强 $\Sigma^\sharp$ 空间).

命题 3.2.28[63] 设 $f: X \to Y$ 是闭 L 映射. 如果 X 是强 Σ 空间, 则 Y 是强 Σ 空间.

证明 因为 X 是强 Σ 空间, 由定理 3.2.10, X 是次仿紧空间, 所以 Y 是次仿紧空间 (见附录 A 推论 3.4). 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的闭 (mod$k$) 网, 其中

$\mathscr{P}_n$ 是离散的. 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_n$, 使 $\mathscr{U}_n$ 中每一元仅交 $\mathscr{P}_n$ 的至多一个元. 对 $y\in Y$, 存在 $\mathscr{U}_n$ 的可数集 $\mathscr{U}_{ny}$, 使 $f^{-1}(y)\subset\cup\mathscr{U}_{ny}$, 那么有 y 的开邻域 V_{ny}, 使 $f^{-1}(V_{ny})\subset\cup\mathscr{U}_{ny}$. 令 $\mathscr{V}_n=\{V_{ny}:y\in Y\}$. 则 $\mathscr{V}_n$ 是 Y 的开覆盖, 因而 $\mathscr{V}_n$ 有 σ 离散的闭加细 $\mathscr{F}_n$. 置 $\mathscr{F}_n=\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda_n\}$. 那么对 $\alpha\in\Lambda_n$, 存在 $y_\alpha\in Y$, 使 $F_\alpha\subset V_{ny_\alpha}$. 让

$$\mathscr{B}_n=\{f^{-1}(F_\alpha)\cap U:\alpha\in\Lambda_n,U\in\mathscr{U}_{ny_\alpha}\},$$

则 $\mathscr{B}_n$ 是 X 的覆盖. 置 $\mathscr{U}_{ny_\alpha}=\{U_{\alpha j}\}_{j\in\mathbb{N}}$. 那么 $\mathscr{B}_n=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{nj}$, 其中 $\mathscr{B}_{nj}=\{f^{-1}(F_\alpha)\cap U_{\alpha j}:\alpha\in\Lambda_n\}$. 设 $\mathscr{C}_n=(\mathscr{P}_n\wedge\mathscr{B}_n)^-$. 因为 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的离散闭集族, 所以 $\mathscr{P}_n$ 的每一元是 $\mathscr{C}_n$ 的某子集之并集. 让 $\mathscr{P}_n=\{P_\beta:\beta\in\Gamma_n\}$. 那么 $\mathscr{C}_n=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{C}_{nj}$, 其中 $\mathscr{C}_{nj}=\{\overline{P_\beta\cap f^{-1}(F_\alpha)\cap U_{\alpha j}}:\alpha\in\Lambda_n,\beta\in\Gamma_n\}$, 从而 $f(\mathscr{C}_{nj})=\{\overline{f(P_\beta\cap U_{\alpha j})\cap F_\alpha}:\alpha\in\Lambda_n,\beta\in\Gamma_n\}$. 因为 $U_{\alpha j}$ 交 $\mathscr{P}_n$ 的至多一个元, 并且 $\mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 离散闭集族, 所以 $f(\mathscr{C}_{nj})$ 是 Y 的 σ 离散闭集族. 往证 $\bigcup_{n,j\in\mathbb{N}}f(\mathscr{C}_{nj})$ 是 Y 的几乎 (mod$k$) 网. 对 $y\in Y$, 存在 $x\in K\in\mathscr{K}$, 使 $y=f(x)$. 对 Y 的开集 $W\supset f(K)$, 存在 $\beta\in\Gamma_n$, 满足 $K\subset P_\beta\subset f^{-1}(W)$. 因为 P_β 是 $\mathscr{C}_n$ 的某子集之并集, 存在 $\alpha\in\Lambda_n$ 和 $j\in\mathbb{N}$, 使 $x\in\overline{P_\beta\cap f^{-1}(F_\alpha)\cap U_{\alpha j}}\subset P_\beta\subset f^{-1}(W)$, 于是 $y\in\overline{f(P_\beta\cap U_{\alpha j})\cap F_\alpha}\subset f(P_\beta)\subset W$. 由引理 1.5.13, $\bigcup_{n,j\in\mathbb{N}}f(\mathscr{C}_{nj})$ 是 Y 的几乎 (mod$k$) 网. 故 Y 是强 Σ 空间.

定理 3.2.29[383] 设 $f:X\to Y$ 是闭映射. 若 X 是 Σ 空间, 则存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z, 使对 $y\in Y-Z, f^{-1}(y)$ 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子空间.

证明 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 Σ 空间 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的闭拟 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是关于有限交封闭的局部有限集族且 $X\in\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 定义

$$Z_n=\cup\{f(P)\cap f(Q):P,Q\in\mathscr{P}_n\text{ 且 }|f(P)\cap f(Q)|<\aleph_0\},$$
$$Z=\bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}}Z_n.$$

由引理 3.2.20, Z 是 Y 的 σ 闭离散子空间. 设 $y\in Y-Z$.

对 $n\in\mathbb{N}, f^{-1}(y)$ 仅与 $\mathscr{P}_n$ 中有限个元相交. 事实上, 先取定 $x\in f^{-1}(y)$. 设存在 $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{P}_n$, 使 $P_i\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$. 对 $m\geqslant n$, 令 $Q_m=C(\mathscr{P}_m,x)$. 则 $Q_m\in\mathscr{P}_m$. 因为 $y\in f(P_m)\cap f(Q_m)-Z$, 于是 $f(P_m)\cap f(Q_m)$ 是无限集. 从而存在 Y 中非平凡的序列 $\{y_m\}_{m\geqslant n}$, 使 $y_m\in f(P_m)\cap f(Q_m)$. 取定 $p_m\in P_m\cap f^{-1}(y_m)$, $q_m\in Q_m\cap f^{-1}(y_m)$. 那么 $\{p_m\}$ 在 X 中无聚点, 因此 $\{y_m\}$ 在 Y 中无聚点, 故 $\{q_m\}$ 在 X 中无聚点, 这与命题 3.2.2 相矛盾.

由此, $f^{-1}(y)$ 具有可数闭拟 (mod$k$) 网. 再由定理 3.2.14, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子空间.

利用推论 3.2.15, 有下述推论.

推论 3.2.30[383] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 若 X 是强 Σ 空间, 则存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z, 使对 $y \in Y - Z, f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

形如定理 3.2.29 或推论 3.2.30, 把具有某种广义度量性质的空间之闭映象分解为 σ 闭离散子空间与每一点的纤维具有更好性质子空间之并. 这类型定理的研究起始于 Lašnev[211], 后来得到 Arhangel'skiĭ[24], Chaber[84], Yajima 和 Tanaka[383] 等的进一步发展, 将其称为闭映射的分解定理或值域分解定理.

定义 3.2.31 设 Φ, Ξ 是两拓扑性质. 称性质 Φ 满足 Ξ 型分解定理, 若对具有性质 Φ 的空间 X 及闭映射 $f: X \to Y$, 存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z, 使对 $y \in Y - Z$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的具有性质 Ξ 的子空间.

因而, 推论 3.2.30 可简述为强 Σ 性质满足 Lindelöf 型分解定理. 易验证: 设 Φ, Ξ 是两拓扑性质, 其中闭映射保持性质 Ξ. 若 Φ 满足 Ξ 型分解定理, 则 Φ 的闭映象也满足 Ξ 型分解定理.

问题 3.2.32 (1) 强 Σ^* 空间是否满足 Lindelöf 型分解定理 [332]?

(2) perfect 的强 Σ 空间是否满足紧型分解定理 [84]?

命题 1.5.10 证明了强 Σ 性质是可数可积性. 用同样的方法易知, 强 $\Sigma^\sharp$ 性质也是可数可积性 [140]. 作为映射定理的应用, 下面的定理将说明强 Σ^* 性质甚至不是有限可积性 (见例 3.2.36(3)).

定理 3.2.33[324] 对仿紧空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 Σ 空间;

(2) $X \times \mathbb{I}$ 是 Σ 空间;

(3) $X \times \mathbb{I}$ 是 Σ^* 空间.

证明 只须证 (3) $\Rightarrow$ (1). 因为 $\pi_1: X \times \mathbb{I} \to X$ 是逆紧映射, 所以 $X \times \mathbb{I}$ 是仿紧空间, 故 $X \times \mathbb{I}$ 是强 Σ^* 空间. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 $X \times \mathbb{I}$ 的关于 $\mathscr{K}$ 的闭 (mod$k$) 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 $X \times \mathbb{I}$ 的 HCP 集族且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. 首先, 关于 $n \in \mathbb{N}$, 归纳地构造 X 的开集族 $\{V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n): \alpha_i \in \Lambda_i, i \leqslant n\}$ 和 $\mathbb{I}$ 的集族 $\{\mathbb{I}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n): \alpha_i \in \Lambda_i, i \leqslant n\}$, 满足

(33.1) $\{V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n): \alpha_i \in \Lambda_i, i \leqslant n\}$ 是 X 的局部有限开覆盖.

(33.2) $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}) \subset V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\mathbb{I}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}) \subset \mathbb{I}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

(33.3) 若 $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq \varnothing$, 则 $\mathbb{I}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是 $\mathbb{I}$ 中非平凡的闭区间.

(33.4) $\overline{V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)} \times \mathbb{I}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 仅与 $\mathscr{P}_n$ 的有限个元相交.

令 $V(\varnothing) = X, \mathbb{I}(\varnothing) = \mathbb{I}$. 假设对 $n \leqslant k$, 已构造满足上述条件的集族. 考虑 $n = k+1$, 对 $i \leqslant k$, 固定 $\alpha_i \in \Lambda_i$, 使 $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \neq \varnothing$. 对 $x \in \overline{V(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}$, 由引理 2.5.4, 存在 $X \times \mathbb{I}$ 的有限集 K_x, 使 $\mathscr{P}_{k+1}$ 在 $\{x\} \times \mathbb{I}(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) - K_x$ 中是局

部有限的, 于是有 $\mathbb{I}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 中非平凡的闭子区间 $\mathbb{I}_x$, 使 $(\{x\}\times\mathbb{I}_x)\cap K_x=\varnothing$. 取 x 在 $\overline{V(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}$ 中的开邻域 U_x, 满足

$$\overline{U}_x\times\mathbb{I}_x\subset X\times\mathbb{I}-\cup\{P\in\mathscr{P}_{k+1}:P\cap(\{x\}\times\mathbb{I}_x)=\varnothing\}.$$

从而, 存在 $\overline{V(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}$ 的局部有限开覆盖 $\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\}$ 加细 $\{U_x:x\in\overline{V(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}\}$. 让 φ 是从 $\Gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 到 $\overline{V(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}$ 的函数, 使当 $\gamma\in\Gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 时, $V_\gamma\subset U_{\varphi(\gamma)}$. 置

$$\Lambda_{k+1}=\cup\{\Gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_k):\alpha_i\in\Lambda_i,i\leqslant k,V(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq\varnothing\};$$

$$V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1})=\begin{cases}V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1})\cap V_{\alpha_{k+1}}, & V(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq\varnothing\text{ 且}\\ & \alpha_{k+1}\in\Gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_k),\\ \varnothing, & \text{其它;}\end{cases}$$

$$\mathbb{I}(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1})=\begin{cases}\mathbb{I}_{\varphi(\alpha_{k+1})}, & V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1})\neq\varnothing,\\ \varnothing, & V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1})=\varnothing,\end{cases}$$

则集族 $\{V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1}):\alpha_i\in\Lambda_i,i\leqslant k+1\}$, $\{\mathbb{I}(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1}):\alpha_i\in\Lambda_i,i\leqslant k+1\}$ 满足所要求的全部条件.

定义

$$Z=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\cup\{\overline{V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}\times\mathbb{I}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\in\Lambda_i,i\leqslant n\}).$$

那么 Z 是 $X\times\mathbb{I}$ 的闭集, 并且 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_{n|Z}$ 是 Z 的关于 $\mathscr{K}_{|Z}$ 的 σ 局部有限闭 (mod$k$) 网. 从而 Z 是强 Σ 空间. 取 $f=\pi_{1|Z}$. 对 $x\in X$, 存在 $(\alpha_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$, 使 $x\in V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 取 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 那么 $(x,y)\in Z$ 且 $f(x,y)=x$, 所以 $f:Z\to X$ 是逆紧映射. 故 X 是强 Σ 空间.

问题 3.2.34　(1) 若 $X\times\mathbb{I}$ 是强 Σ^* 空间, 那么 X 是否是强 Σ 空间?

(2) Σ 空间性质是否是有限可积性?

本节的最后通过一些例说明 Σ 空间类的不蕴涵关系及映射性质. 先证明一个引理.

引理 3.2.35　若 Σ 空间 X 的所有可数紧的闭集是有限集, 则 X 是 σ 闭离散空间.

证明　设 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的 σ 局部有限闭拟 (mod$k$) 网. 不妨设 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭. 记 $\mathscr{H}=\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对 $\alpha\in\Lambda$, 再记 $\{P\in\mathscr{P}:H_\alpha\subset P\}=\{P_{\alpha i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, $G_{\alpha n}=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha i},n\in\mathbb{N}$. 则存在 $k\in\mathbb{N}$, 使 $|G_{\alpha k}|<\aleph_0$. 否则, 存在 X 的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_1\in G_{\alpha 1},x_{n+1}\in G_{\alpha n+1}-\{x_i:i\leqslant n\}$. 由于 $\{G_{\alpha n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H_α 在 X 中递减的网, 于是 $H_\alpha\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的可数紧的闭集, 矛盾. 这说明存在 $k(\alpha)\in\mathbb{N}$, 使 $|G_{\alpha k(\alpha)}|<\aleph_0$, 并且 $G_{\alpha k(\alpha)}\in\mathscr{P}$. 从而 $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_{\alpha k(\alpha)}$ 是 σ 闭离散空间.

例 3.2.36 Σ 空间类.

(1) 强 $\Sigma^\sharp \not\Rightarrow$ 次仿紧, 如例 1.8.10 中的空间 X.

(2) 正则, Lindelöf, $\Sigma^\sharp \not\Rightarrow \Sigma^*$, 如 Fortissimo 空间 X_p (例 2.5.19). X_p 是正则, Lindelöf 空间. $\{\{p,x\}: x\in X_p-\{p\}\}$ 是 X_p 的闭包保持覆盖, 所以 X_p 是 $\Sigma^\sharp$ 空间. 由推论 3.2.15 和引理 3.2.35, X_p 不是 Σ^* 空间.

(3) 仿紧, $\Sigma^* \not\Rightarrow \Sigma$, 如例 2.11.9 中的空间 X. 由推论 3.2.27, X 是 Σ^* 空间; 又由定理 3.2.33, $X\times\mathbb{I}$ 不是 Σ^* 空间. 所以强 Σ^* 性质不是有限可积性.

(4) 强 $\Sigma \not\Rightarrow$ 点 G_δ 性质, 如 ω_1+1 具有序拓扑.

(5) 具有可数拟 (mod$k$) 网的正则空间 $\not\Rightarrow \Sigma$ 空间 [372].

定义 $X=[0,\omega_1]\times\mathbb{R}-\{\omega_1\}\times\mathbb{P}$. 则 X 是正则空间. 对 $r\in\mathbb{R}$, 定义 X 的可数紧的闭集 l_r 如下: 若 $r\in\mathbb{Q}$, $l_r=[0,\omega_1]\times\{r\}$; 若 $r\in\mathbb{P}$, $l_r=[0,\omega_1)\times\{r\}$. 设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 中以有理数为端点的开区间全体. 置

$$\mathscr{C}=\{l_r: r\in\mathbb{R}\},$$
$$\mathscr{P}=\{l_r: r\in\mathbb{Q}\}\cup\{[0,\omega_1)\times B: B\in\mathscr{B}\}.$$

则 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{C}$ 的可数拟 (mod$k$) 网.

设 $\mathscr{F}$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的 σ 局部有限闭拟 (mod$k$) 网. 断言: 对 $r\in\mathbb{P}$, 存在 $H\in\mathscr{H}$, 使 $\pi_1(l_r\cap H)$ 是 $[0,\omega_1)$ 的不可数集. 事实上, l_r 仅与 $\mathscr{F}$ 中可数个元相交, 所以 $\{F\in\mathscr{F}:\pi_1(l_r\cap F)$ 是 $[0,\omega_1)$ 的非空可数集$\}$ 也是可数的, 从而存在 $\alpha<\omega_1$ 满足: 若 $F\in\mathscr{F}$ 且 $[\alpha,\omega_1)\cap\pi_1(l_r\cap F)\neq\varnothing$, 则 $\pi_1(l_r\cap F)$ 是不可数的. 取 $H\in\mathscr{H}$, 使 $(\alpha,r)\in H$. 如果 $\pi_1(l_r\cap H)$ 是可数的, 存在 $\beta<\omega_1$, 使 $\sup(\pi_1(l_r\cap H))<\beta$. 令 $U=X-\{(\gamma,r):\gamma\geqslant\beta\}$. 则 $H\subset U\in\tau$, 但是不存在 $F\in\mathscr{F}$, 使 $H\subset F\subset U$, 矛盾.

由此, 对 $r\in\mathbb{P}$, 存在 $H_r\in\mathscr{H}$, 使 $\pi_1(l_r\cap H_r)$ 是 $[0,\omega_1)$ 的不可数集, 从而存在 $B_r\in(\mathscr{B})_r$, 使 $H_r\cap(\{\omega_1\}\times\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(B_r))=\varnothing$. 置 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是局部有限的. 存在 $n_r\in\mathbb{N}$ 和 $F_r\in\mathscr{F}_{n_r}$, 使 $H_r\subset F_r\subset X-(\{\omega_1\}\times\overline{B}_r)$.

由 Baire 范畴定理, 存在 $m\in\mathbb{N}, B_0\in\mathscr{B}$ 和 $B_0\cap\mathbb{P}$ 的序列 $\{r_i\}$, 使 $\{r_i\}$ 收敛于某一 $q\in\mathbb{Q}\cap\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(B_0)$, 且每一 $n_{r_i}=m, B_{r_i}=B_0$. 对 $i\in\mathbb{N}$, 由于 $(\omega_1,q)\notin F_{r_i}$, 存在 $\alpha<\omega_1$ 和 $q\in U\in\tau(\mathbb{R})$, 使 $F_{r_i}\cap((\alpha,\omega_1]\times U)=\varnothing$. 由于闭不可数集 $\pi_1(l_r\cap H_r)\subset\pi_1(l_r\cap F_r)$, 所以只要 $r\in U\cap\mathbb{P}$, 就有 $F_r\cap((\alpha,\omega_1]\times U)\neq\varnothing$, 从而 $F_r\neq F_{r_i}$. 因此, 存在 $\{r_i\}$ 的子列, 使对应的 F_{r_i} 是互不相同的, 这与 $\mathscr{F}_m$ 在 (ω_1,q) 的局部有限性相矛盾. 故 X 不是 Σ 空间.

例 3.2.37 Σ 空间类与映射.

(1) 闭映射不保持 Σ 性质, 强 Σ 性质, 如例 2.11.9.

(2) 强 Σ 性质不满足紧型分解定理 [84]: 存在正则, σ 紧空间 X 以及闭映射 $f: X \to \mathbb{I}$, 使 f 的每一纤维不是 X 的紧集.

取 $X = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$. X 赋予如下拓扑: 对 $s \in \mathbb{I}, \{s\} \times (0,1]$ 作为 X 的开子空间具有欧氏拓扑; $(s,0) \in X$ 的邻域基元形如 $V \times \mathbb{I} - (\{s\} \times (0,1])$, 其中 V 是 s 在 $\mathbb{I}$ 的欧氏邻域. 显然, X 是正则空间. 对 $n \in \mathbb{N}, \mathbb{I} \times (\{0\} \cup [1/n, 1])$ 是 X 的紧集, 于是 X 是 σ 紧空间. 让 $f = \pi_1 : X \to \mathbb{I}$. 由命题 2.1.7, f 是闭映射. 对 $s \in \mathbb{I}$, $f^{-1}(s) = \{s\} \times \mathbb{I}$ 不是 X 的紧集.

(3) 强 $\Sigma^\sharp$ 性质不满足 Lindelöf 型分解定理 [84]: 存在具有由紧集组成的闭包保持覆盖的仿紧空间 X 以及闭映射 $f: X \to \mathbb{I}$, 使 f 的每一纤维不是 X 的 Lindelöf 集.

取 $X = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$. X 赋予如下拓扑: $\mathbb{I} \times (0,1]$ 的点是 X 的孤立点; 对 $s \in \mathbb{I}$, $(s,0) \in X$ 的邻域基元形如 $V \times \mathbb{I} - (\{s\} \times (0,1])$, 其中 V 是 s 在 $\mathbb{I}$ 的欧氏邻域. 显然, X 是仿紧空间. 对 $t \in (0,1]$, 令 $K_t = \mathbb{I} \times \{0, t\}$. 那么 K_t 是 X 的紧集, 并且 $\{K_t : t \in (0,1]\}$ 是 X 的闭包保持覆盖. 令 $f = \pi_1 : X \to \mathbb{I}$. 则 f 是闭映射. 对 $s \in \mathbb{I}$, $f^{-1}(s)$ 不是 X 的 Lindelöf 子空间.

X 是第一可数的强 $\Sigma^\sharp$ 空间, 因而命题 3.2.17 和定理 3.2.22 中的 Σ^* 空间不可减弱为 $\Sigma^\sharp$ 空间.

3.3 σ 空间, 半层空间

σ 空间和半层空间都是度量空间最成功的推广, 这主要表现在它们所具有的优美性质. 半层空间可特征为具有 σ 垫状网的空间. 本节将证明 σ 空间与具有 σ 离散网或具有 σ 闭包保持网的正则空间相互等价. 这些典雅的结果构成了一般拓扑学的精华. 本节研究这些空间类的刻画及映射性质, 特别介绍了与 σ 空间密切相关的 (G) 覆盖性质.

首先, 介绍 σ 空间的重要刻画.

定理 3.3.1 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 离散闭网;

(2) X 具有 σ 局部有限闭网;

(3) X 具有 σ 闭包保持闭网;

(4) X 存在 σ 函数, 即存在 X 的 g 函数满足:

(i) 对 X 的点 x, y 及 $n \in \mathbb{N}$, 若 $x \in g(n, y)$, 那么 $g(n, x) \subset g(n, y)$;

(ii) 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x \in g(n, x_n)$, 那么 $x_n \to x$,

若更设 X 是正则空间, 它们也与下述条件等价:

(5) X 存在 g 函数满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 若 $x\in g(n,x_n)$ 且 $x_n\in g(n,y_n)$, 那么 $y_n\ \to x$;

(6) X 是 σ 空间.

证明　显然, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 在正则空间中, (2) $\Leftrightarrow$ (6). 由命题 1.5.16 及 1.5.4 的证明, (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的闭网, 其中 $\mathscr{P}_n=\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma_n\}$ 是闭包保持的. 对 $n,m\in\mathbb{N}$, 若 $\alpha\in\Gamma_n$, 置 $F_{\alpha m}=\cup\{P\in\mathscr{P}_m:P\cap P_\alpha=\varnothing\}$. 则闭集 $P_\alpha,F_{\alpha m}$ 不相交. 记 $\mathscr{H}_{nm}=\bigwedge\{\{P_\alpha,F_{\alpha m}\}:\alpha\in\Gamma_n\}$. 那么 $\mathscr{H}_{nm}$ 的元形如

$$H_{\Gamma'}=(\cap\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma'\})\cap(\cap\{F_{\alpha m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}),\ \text{其中}\ \Gamma'\subset\Gamma_n.$$

(1.1) $\mathscr{H}_{nm}$ 是 X 的离散闭集族.

易验证, $\mathscr{H}_{nm}$ 是互不相交的闭集族. 下面验证它是闭包保持的. 对 Γ_n 的子集族 $\{\Gamma'_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, 设 $x\notin\cup\{H_{\Gamma'_\lambda}:\lambda\in\Lambda\}$. 若 $\lambda\in\Lambda$, 则或者 $x\notin\cap\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma'_\lambda\}$, 或者 $x\notin\cap\{F_{\alpha m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda\}$, 从而或者存在 $\alpha_\lambda\in\Gamma'_\lambda$, 使 $x\notin P_{\alpha_\lambda}$, 或者存在 $\alpha_\lambda\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda$, 使 $x\notin F_{\alpha_\lambda m}$. 置

$$\Lambda'=\{\lambda\in\Lambda:x\notin\cap\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma'_\lambda\}\},$$
$$\Lambda''=\{\lambda\in\Lambda:x\notin\cap\{F_{\alpha m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda\}\},$$
$$F'=\cup_{\lambda\in\Lambda'}P_{\alpha_\lambda},F''=\cup_{\lambda\in\Lambda''}F_{\alpha_\lambda m}.$$

则 $\Lambda=\Lambda'\cup\Lambda''$ 且 $F',F''\in\tau^c$. 令 $V=X-(F'\cup F'')$. 则 x 的开邻域 V 与 $\cup\{H_{\Gamma'_\lambda}:\lambda\in\Lambda\}$ 不相交. 所以 $\cup\{H_{\Gamma'_\lambda}:\lambda\in\Lambda\}$ 是闭集. 故 $\mathscr{H}_{nm}$ 是闭包保持的, 从而它是离散的.

(1.2) $\mathscr{H}=\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_{nm}$ 是 X 的网.

对 $x\in U\in\tau$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\beta\in\Gamma_n$, 使 $x\in P_\beta\subset U$. 令 $\Gamma'=\{\alpha\in\Gamma_n:x\in P_\alpha\}$. 则 $x\in\cap\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma'\}\subset P_\beta\subset U$. 由于 $x\notin\cup\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\delta\in\Gamma_m$, 使 $x\in P_\delta\subset X-\cup\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}$. 从而 $P_\delta\cap(\cup\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\})=\varnothing$, 那么对 $\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'$, 有 $P_\delta\subset F_{\alpha m}$. 因此 $x\in P_\delta\subset\cap\{F_{\alpha m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}$, 所以 $x\in H_{\Gamma'}\subset P_\beta\subset U$. 故 $\mathscr{H}$ 是 X 的网.

(4) $\Rightarrow$ (5). 设 g 是 X 的 σ 函数. 若对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 有 $x\in g(n,x_n)$ 且 $x_n\in g(n,y_n)$, 那么 $x\in g(n,y_n)$, 所以 $y_n\to x$.

(5) $\Rightarrow$ (1). 设正则空间 X 的 g 函数满足 (5). 让 $(X,<)$ 是良序集. 定义 $H:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X\to\tau^c$ 为

$$H(i,n,x)=X-((\bigcup_{y<x}g(i,y))\cup(\bigcup_{y\notin g(i,x)}g(n,y))).$$

那么 $H(i,n,x)\subset g(i,x)$. 对 $i,n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{H}(i,n)=\{H(i,n,x):x\in X\}.$$

则 $\mathscr{H}(i,n)$ 是 X 的离散集族. 事实上, 设 $z \in X$, 令 $y = \min\{h \in X : z \in g(i,h)\}$. 那么若 $y < x$, 则 $g(i,y) \cap H(i,n,x) = \varnothing$; 若 $x < y$, 则 $g(n,z) \cap H(i,n,x) = \varnothing$. 从而 $g(i,y) \cap g(n,z)$ 是 X 中含 z 且交 $\mathscr{H}(i,n)$ 至多一个元的开集. 对 $i,n,m \in \mathbb{N}$, 定义

$$\mathscr{F}(i,n,m) = \{F(i,n,m,x) : x \in X\},$$

其中 $F(i,n,m,x) = \{y \in H(i,n,x) : x \in g(m,y)\}$. 那么 $\mathscr{F}(i,n,m)$ 是 X 的离散集族. 对 $p \in U \in \tau$, 若 $i \in \mathbb{N}$, 令

$$x_i = \min\{h \in X : p \in g(i,h)\}.$$

则存在 $n_i \in \mathbb{N}$, 使 $p \notin \cup\{g(n_i,y) : y \notin g(i,x_i)\}$, 于是 $p \in H(i,n_i,x_i) \subset g(i,x_i)$, 从而 $x_i \to p$. 因此对 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $i_m \geqslant m$, 使 $x_{i_m} \in g(m,p)$. 记 $F_m = F(i_m, n_{i_m}, m, x_{i_m})$. 那么 $p \in F_m$. 如果存在 X 的序列 $\{y_m\}$, 使 $y_m \in F_m - U$, 那么 $p \in g(i_m, x_{i_m}) \subset g(m, x_{i_m})$ 且 $x_{i_m} \in g(m, y_m)$, 于是 $y_m \to p$, 矛盾. 所以存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $F_m \subset U$. 故 $\bigcup_{i,n,m\in\mathbb{N}} \mathscr{F}(i,n,m)$ 是 X 的 σ 离散网.

定理 3.3.1 的 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) 称为 Nagata-Siwiec 定理 [352], 关于 g 函数的等价特征是 Heath 和 Hodel[158] 的杰作.

推论 3.3.2 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 局部有限闭网;

(2) X 是具有点可数 p-k 网的强 Σ 空间 [143];

(3) X 是具有 G_δ 对角线的 $\Sigma^\sharp$ 空间 [189];

(4) X 是 $\sigma^\sharp$ 空间和 $\Sigma^\sharp$ 空间 [348].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2), (3) 是显然的. 由定理 1.4.10, 3.2.6 和命题 1.5.18 得 (3) $\Rightarrow$ (4).

(2) $\Rightarrow$ (4). 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 σ 局部有限闭 (mod$k$) 网. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的几乎 (mod$k$) 网, 由引理 2.11.6, 存在可度量空间 M, M的 σ 离散基 $\mathscr{B}$ 和 $X \times M$ 的子空间 Z, 满足下述条件, 其中 $f = \pi_{1|Z}, g = \pi_{2|Z}$.

(2.1) $\mathscr{P} = fg^{-1}(\mathscr{B})$;

(2.2) $g : Z \to M$ 是逆紧映射.

由 (2.2), Z 是具有点可数 p-k 网的仿紧 M 空间. 再由定理 3.1.8, Z 是可度量空间. 因为 $\mathscr{B}$ 是 M 的基, $g^{-1}(\mathscr{B})$ 是 Z 的 (mod$k$) 网. 又由 (2.1) 及推论 2.11.4, f 是 σ 局部有限映射. 再由推论 2.11.5, X 具有 σ 局部有限网.

设 $\mathscr{Q}$ 是 X 的 σ 局部有限网. 则 $\overline{\mathscr{Q}}$ 是 X 的 σ 局部有限闭集族. 对 $x \neq y \in X$, 存在分别包含 x, y 的不相交的开集 U, V, 于是有 $Q \in \mathscr{Q}$, 使 $x \in Q \subset U$. 由于 $\overline{U} \cap V = \varnothing$, 从而 $x \in \overline{Q} \subset X - \{y\}$. 故 $\overline{\mathscr{Q}}$ 是 X 的 p 网, 因此 X 是 $\sigma^\sharp$ 空间.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 g, h 分别是 X 的 $\sigma^\sharp$ 函数, $\Sigma^\sharp$ 函数. 定义 $q : \mathbb{N} \times X \to \tau$ 为

$$q(n,x)=g(n,x)\cap h(n,x).$$

那么 q 是 X 的 g 函数且对 $x,y\in X, n\in\mathbb{N}$, 若 $x\in q(n,y)$, 那么 $q(n,x)\subset q(n,y)$. 设对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 有 $x\in q(n,x_n)$. 由于 h 是 X 的 $\Sigma^\sharp$ 函数, 于是 $\{x_n\}$ 的任何子列有聚点, 设 p 是 $\{x_n\}$ 的聚点. 如果 $p\neq x$, 那么存在 $n\geqslant k$, 使 $x\notin g(k,p)$ 且 $x_n\in g(k,p)$, 于是 $x\in g(n,x_n)\subset g(k,x_n)\subset g(k,p)$, 矛盾. 从而 x 是 $\{x_n\}$ 的任一子列的唯一聚点, 所以 $x_n\to x$. 故 q 是 X 的 σ 函数. 因此, X 具有 σ 局部有限闭网.

定义 3.3.3 称空间 X 满足 (G)[90], 如果存在 X 的集族 $\mathscr{W}=\{\mathscr{W}_x: x\in X\}$ 具性质 (1) 和 (2):

(1) 对 $x\in X$, $x\in\cap\mathscr{W}_x$ 且 $|\mathscr{W}_x|\leqslant\aleph_0$;

(2) 对 $x\in U\in\tau$, 存在含 x 的开集 $V(x,U)$, 使当 $y\in V(x,U)$ 时, 有 $W\in\mathscr{W}_y$ 满足 $x\in W\subset U$;

若更设 $\mathscr{W}$ 具性质 (3), 则称 X 满足一致 (G)[296].

(3) 对 $x\in X$, $\mathscr{W}_x$ 的无限子集是 x 的网.

在下面论述满足 (G) 的空间中, $V(x,U)$ 均指性质 (2) 中的相应集.

引理 3.3.4[297] (1) 满足 (G) 的空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

(2) 满足一致 (G) 的空间是遗传亚紧空间.

证明 由于 (G) (一致 (G)) 性质是遗传的, 所以只须证满足 (G) (一致 (G)) 的空间是亚 Lindelöf 空间 (亚紧空间). 设 X 的集族 $\mathscr{W}=\{\mathscr{W}_x: x\in X\}$ 满足 (G). 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, 其中 κ 是基数. 对 $\alpha<\kappa$, 让 $P_\alpha=U_\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$, $O_\alpha=\cup\{V(x,U_\alpha): x\in P_\alpha\}$. 则 $O_\alpha\in\tau$ 且 $P_\alpha\subset O_\alpha\subset U_\alpha$. 令 $\mathscr{O}=\{O_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$. 则 $\mathscr{O}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细.

(4.1) $\mathscr{O}$ 是点可数的. 若不然, 存在 $z\in X$ 和 $[0,\kappa)$ 中严格递增的序列 $\{\alpha_\gamma\}_{\gamma<\omega_1}$, 使 $z\in O_{\alpha_\gamma}$ 且 $z\notin P_{\alpha_0}$. 则存在 $x_\gamma\in P_{\alpha_\gamma}$, 使 $z\in V(x_\gamma,U_{\alpha_\gamma})$, 从而存在 $W_\gamma\in\mathscr{W}_z$, 使 $x_\gamma\in W_\gamma\subset U_{\alpha_\gamma}$. 对 $\gamma<\gamma'<\omega_1$, 由于 $x_{\gamma'}\notin U_{\alpha_\gamma}$, 所以 $x_{\gamma'}\notin W_\gamma$, 这与 $\mathscr{W}_z$ 的可数性相矛盾. 故 X 是亚 Lindelöf 空间.

(4.2) 设 $\mathscr{W}=\{\mathscr{W}_x: x\in X\}$ 满足一致 (G), 则上述 $\mathscr{O}$ 是点有限的. 若不然, 如 (4.1) 同样的证明, 存在 X 的点 z, 序列 $\{x_n\}$ 及 $\mathscr{W}_z$ 的子集 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $x_n\in W_n$ 且当 $n>m$ 时, $x_n\notin W_m$. 于是 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 z 的网, 所以存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $W_n\subset W_1-\{x_1\}$, 因此 $n>1$ 且 $x_n\in W_1$, 矛盾. 故 X 是亚紧空间.

引理 3.3.5[124] 满足 (G) 的半层空间具有 σ 离散网.

证明 设半层空间 X 的集族 $\mathscr{W}=\{\mathscr{W}_x: x\in X\}$ 满足 (G), 其中 $\mathscr{W}_x=\{W(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 再设 g 是 X 的半层函数. 让 $(X,<)$ 是良序集. 对 $i,n,k\in\mathbb{N}$, 定义

$$H(i,n,x)=X-((\bigcup_{y<x}g(i,y))\cup(\bigcup_{y\notin g(i,x)}g(n,y))),\ x\in X;$$
$$F(i,n,k,x)=H(i,n,x)\cap W(k,x),\ x\in X;$$
$$\mathscr{F}(i,n,k)=\{F(i,n,k,x):x\in X\}.$$

那么 $H(i,n,x)\subset g(i,x)$, 且由定理 3.3.1 中的证明, $\mathscr{F}(i,n,k)$ 是 X 的离散集族. 对 $p\in U\in\tau$, 若 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$x_i=\min\{h\in X:p\in g(i,h)\}.$$

则存在 $n_i\in\mathbb{N}$, 使 $p\notin\cup\{g(n_i,y):y\notin g(i,x_i)\}$, 于是 $p\in H(i,n_i,x_i)\subset g(i,x_i)$, 从而 $x_i\to p$, 所以存在 $i_0,k\in\mathbb{N}$, 使 $x_{i_0}\in V(p,U)$ 且 $p\in W(k,x_{i_0})\subset U$. 因此 $p\in F(i_0,n_{i_0},k,x_{i_0})\subset U$. 故 X 具有 σ 离散网.

引理 3.3.6[296] 满足一致 (G) 和点 G_δ 性质的空间是半层空间.

证明 设具有点 G_δ 性质的空间 X 的集族 $\mathscr{W}=\{\mathscr{W}_x:x\in X\}$ 满足一致 (G).

(6.1) 构造 X 的点有限覆盖列 $\{\mathscr{H}_n\}$.

对 $x\in X$, 设 X 的递减开集列 $\{G(n,x)\}$ 的交集是 $\{x\}$. 关于 $n\in\mathbb{N}$, 归纳定义 X 的点有限开覆盖 $\mathscr{H}_n$, 函数 $h_n:\mathscr{H}_n\to X$ 和 x 的开邻域 $O(n,x)$ 如下. 首先, 令 $\mathscr{H}_0=\{X\}$. 取定 $z\in X$ 并定义 $h_0:\mathscr{H}_0\to X$ 为 $h_0(X)=z$. 置

$$O(1,x)=\begin{cases}G(1,x), & x=z,\\ G(1,x)-\{z\}, & x\neq z.\end{cases}$$

假设对 $m\leqslant n,x\in X$, 已定义了 $\mathscr{H}_{m-1},h_{m-1}$ 和 $O(m,x)$. 设 $(\mathscr{H}_{n-1},<)$ 是良序集. 对 $H\in\mathscr{H}_{n-1}$, 由引理 3.3.4, H 的开覆盖 $\{H\cap V(x,O(n,x))\}_{x\in H}$ 存在点有限的开加细 $\mathscr{F}_n(H)$. 定义

$$\mathscr{H}_n(H)=\mathscr{F}_n(H)-\cup\{\mathscr{F}_n(H'):H'<H\},H\in\mathscr{H}_{n-1};$$
$$\mathscr{H}_n=\cup\{\mathscr{H}_n(H):H\in\mathscr{H}_{n-1}\}.$$

则 $\mathscr{H}_n$ 是 X 的点有限开覆盖. 对 $H\in\mathscr{H}_n$, 存在唯一 $H'\in\mathscr{H}_{n-1}$, 使 $H\in\mathscr{H}_n(H')\subset\mathscr{F}_n(H')$. 选取 $x_H\in H'$, 使 $H\subset H'\cap V(x_H,O(n,x_H))$, 并定义 $h_n(H)=x_H$. 再定义

(6.1.1) $O(n+1,x)=G(n+1,x)-\{h_m(H):m\leqslant n,H\in(\mathscr{H}_m)_x$ 且 $x\neq h_m(H)\}$.

则 $x\in O(n+1,x)\in\tau$.

(6.2) $\{\mathscr{H}_n\}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列.

否则, 存在 $x\neq y\in X$ 和集列 $\{H_n\}$, 使 $x,y\in H_n\in\mathscr{H}_n$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的集族 $\{H_n^m\}_{m\leqslant n}$, 使 $H_n^n=H_n,H_n^m\in\mathscr{H}_m$ 且 $H_n^m\in\mathscr{H}_m(H_n^{m-1})$ $(\forall m>1)$. 这时 $x\in H_n\subset H_n^m\subset H_n^{m-1}$. 由 $\mathscr{H}_n$ 的点有限性, 关于 $n\in\mathbb{N}$, 可归纳定义 $\mathbb{N}$ 的无限集 I_n 和 $i_n\in\mathbb{N}$, 满足

(6.2.1) $i_n = \min I_n$;

(6.2.2) $I_{n+1} \subset I_n - \{i_n\}$;

(6.2.3) $m, k \in I_n \Rightarrow H_m^n = H_k^n$.

令 $K_n = H_{i_n}^n, q_n = h_n(K_n)$. 则 $K_n = H_m^n$ $(\forall m \in I_n)$, 且当 $n > m$ 时, $q_n \in K_m \supset K_n$. 因为 $x \in K_n \subset V(q_n, O(n, q_n))$, 所以由 (G), 存在 $W_n \in \mathscr{W}_x$, 使 $q_n \in W_n \subset O(n, q_n)$.

取 X 中分别含 x, y 的不相交开集 U_x, U_y. 不妨设存在 $\mathbb{N}$ 的无限集 J, 使当 $n \in J$ 时, $q_n \notin U_x$, 从而 $W_n \not\subset U_x$. 由一致 (G), $\{W_n : n \in J\}$ 是有限集. 不妨设当 $n, m \in J$ 时, $W_n = W_m$. 那么 $q_m \in O(i_n, q_n)$, 所以由 (6.1.1), 有 $q_n = q_m$, 设其固定值为 q. 对 $n \in J$, $x \in V(q, O(n, q)) \subset O(n, q) \subset G(n, q)$. 因此 $x \in \bigcap_{n \in J} G(n, q) = \{q\}$, 故 $q \in U_x$, 矛盾.

(6.3) X 是半层空间.

设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列, 其中 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $n \in \mathbb{N}, x \in X$, 取定 $U(n, x) \in (\mathscr{U}_n)_x$, 并定义 $g(n, x) = V(x, U(n, x))$. 若存在 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 使 $x \in g(n, x_n), x_n \nrightarrow x$, 则存在 x 的开邻域 U, 使 $\{x_n\}$ 不终于 U. 因为 $x \in V(x_n, U(n, x_n)) \subset U(n, x_n)$, 存在 $W_n \in \mathscr{W}_x$, 使 $x_n \in W_n \subset U(n, x_n) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$. 令 $I = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$. 则 I 是无限集, 所以 $\{W_n : n \in I\}$ 是有限集. 不妨设当 $n, m \in I$ 时, $W_n = W_m$. 那么 $x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m)$, 从而 $x_n \in \bigcap_{m \in I} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) = \{x\} \subset U$, 矛盾. 故 X 是半层空间.

定理 3.3.7[124, 296] 满足一致 (G) 和点 G_δ 性质的正则空间是亚紧 σ 空间.

问题 3.3.8[296] 亚紧 σ 空间是否具有一致 (G)?

下面介绍 σ 空间的映射性质.

命题 3.3.9 逆可数紧映射保持 $\sigma^\sharp$ 空间.

证明 设 $f : X \to Y$ 是逆可数紧映射, 其中 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的闭 p 网, $\mathscr{F}_n$ 是关于任意交封闭的闭包保持集族且 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$. 定义 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$ 为 $g(n, x) = X - \cup\{F \in \mathscr{F}_n : x \notin F\}$. 则 g 是 X 的 $\sigma^\sharp$ 函数. 对 $y \in Y$, $f^{-1}(y) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g(n, f^{-1}(y))$. 否则, 存在 X 的点 x 和序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \in f^{-1}(y)$ 且 $x \in g(n, x_n) - f^{-1}(y)$. 设 a 是 $\{x_n\}$ 在 $f^{-1}(y)$ 的聚点. 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \in g(k, a)$, 从而 $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} g(n_k, x_{n_k}) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} g(k, a) = \{a\}$, 矛盾.

对 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\mathscr{P}_n = f(\mathscr{F}_n)$. 那么 $\mathscr{P}_n$ 是 Y 的闭包保持闭集族. 对 $y \neq z \in Y$, 取 $x_z \in f^{-1}(z)$, 那么存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $x_z \notin g(m, f^{-1}(y))$, 从而存在 $F \in \mathscr{F}_m$, 使 $x_z \in F$ 且 $F \cap f^{-1}(y) = \varnothing$, 于是 $z \in f(F) \subset Y - \{y\}$. 故 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 Y 的 σ 闭包保持的闭 p 网.

由定理 3.3.1 和推论 3.3.2, 有下述 σ 空间的映象和逆象定理.

命题 3.3.10[352] 闭映射保持具有 σ 局部有限闭网的空间.

命题 3.3.11[36] 设 $f: X \to Y$ 是逆紧映射. 若 Y 具有 σ 局部有限闭网且 X 具有 G_δ 对角线, 则 X 具有 σ 局部有限闭网.

定理 3.3.12[84] σ 空间满足紧型分解定理.

证明 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 σ 空间 X 的闭网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是关于有限交封闭的局部有限集族且 $X \in \mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. 让 $f: X \to Y$ 是闭映射. 对 $n \in \mathbb{N}, y \in Y$, 定义

$$\mathscr{E}_n = f(\mathscr{P}_n),\ C(n,y) = \cap(\mathscr{E}_n)_y,$$
$$E_n = \{y \in Y : |C(n,y)| < \aleph_0\},$$
$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

由引理 3.2.19, Z 是 Y 的 σ 闭离散子空间. 对 $y \in Y - Z$, $C(n,y)$ 是无限集, 存在 Y 中非平凡的序列 $\{y_n\}$, 使 $y_n \in C(n,y)$. 从而对 $n \geqslant m$, 若 $P \in (\mathscr{P}_m)_{f^{-1}(y)}$, 则 $P \cap f^{-1}(y_n) \neq \varnothing$. 因为

$$\cup\{E \cap E' : \text{存在 } n \in \mathbb{N}, \text{ 使 } E, E' \in \mathscr{E}_n \text{ 且 } |E \cap E'| < \aleph_0\} \subset Z,$$

由定理 3.2.29 的证明, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

令 $A = f^{-1}(y)$. 若 A 不是 X 的紧集, 则 A 不是 X 的可数紧集, 从而存在 X 的可数开集族 $\mathscr{V}$, 使 $\mathscr{V}$ 覆盖 A, 但是 $\mathscr{V}$ 的任何有限集不能覆盖 A. 对 $x \in A$, 存在 $V_x \in \mathscr{V}, W_x \in \tau(X)$, 使 $x \in W_x \subset \overline{W}_x \subset V_x$. 那么 A 的覆盖 $\{W_x\}_{x\in A}$ 有可数子覆盖 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 这时 $\{\overline{W}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的任何有限子族不能覆盖 A. 取定 $x_1 \in A \cap W_1$, 令 $U_1 = W_1$. 存在 $x_2 \in A - \overline{U}_1, n_1 \in \mathbb{N}$, 使 $x_2 \in W_{n_1}$. 令 $U_2 = \bigcup_{i\leqslant n_1} W_i$. 则 $U_1 \subset U_2, x_2 \in A \cap (U_2 - \overline{U}_1)$. 依此类推, 可构造 X 的递增的开集列 $\{U_k\}$ 覆盖 A 且 $A \cap (U_{k+1} - \overline{U}_k) \neq \varnothing$.

选取 $x_k \in A \cap U_{k+1} - \overline{U}_k$. 那么存在 $F_k \in \mathscr{P}_{n_k}$, 使 $x_k \in F_k \subset X - \overline{U}_k$ 且 $n_{k+1} > n_k$, 于是存在 $z_k \in F_k \cap f^{-1}(y_{n_k})$. 因为 $y_n \to y$, 所以 $\{z_k\}$ 有聚点. 设 z 是它的聚点. 那么 $z \in A$. 这时存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $z \in U_m$, 从而有 $k \geqslant m$, 使 $z_k \in U_m \cap F_k = \varnothing$, 矛盾. 故 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集. 因此, σ 空间满足紧型分解定理.

问题 3.3.13[84] σ 空间的逆紧逆象是否满足紧型分解定理?

定理 3.3.14[367] 可数仿紧 σ 空间的逆可数紧逆象满足可数紧型分解定理.

证明 设 $g: X \to Z$ 是逆可数紧映射, 其中 Z 是可数仿紧的 σ 空间. 让 $f: X \to Y$ 是闭映射. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 Z 的网, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是关于有限交封闭的局部有限闭覆盖且 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$. 对 $n, i \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{B}_n = g^{-1}(\mathscr{F}_n), \mathscr{P}_n = f(\mathscr{B}_n),$$
$$Y_{ni} = \cup\{P_{n1} \cap \cdots \cap P_{ni} : \text{对 } k \leqslant i, P_{nk} \in \mathscr{P}_n \text{ 且 } |P_{n1} \cap \cdots \cap P_{ni}| < \aleph_0\}.$$

由引理 3.2.20, Y_{ni} 是 Y 的闭离散集. 令 $Y_0 = Y - \bigcup_{n,i\in\mathbb{N}} Y_{ni}$.

设 $y_0 \in Y_0$. 若 $f^{-1}(y_0)$ 不是可数紧的, 由 g 的逆可数紧性, 存在 $f^{-1}(y_0)$ 的序列 $\{x_i\}$, 使各 $g(x_i)$ 互不相同且 $\{g(x_i): i \in \mathbb{N}\}$ 是 Z 的闭离散集. 由 Z 的可数仿紧性, 存在 Z 中局部有限的开集族 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 使 $g(x_i) \in V_i$. 对 $i, n \in \mathbb{N}$, 存在 $F_{ni} \in \mathscr{F}_n$, 使 $g(x_i) \in F_{ni}$ 且 $F_{ni} = \cap(\mathscr{F}_n)_{g(x_i)}$. 这时有 $j_i \in \mathbb{N}$, 使当 $n \geqslant j_i$ 时, $F_{ni} \subset V_i$. 不妨设 $j_i < j_{i+1}$. 记 $B_{ni} = g^{-1}(F_{ni})$. 那么 $x_i \in B_{ni} \in \mathscr{B}_n$, 于是 $y_0 \in f(B_{j_ik})$, 从而 $\bigcap_{k\leqslant i} f(B_{j_ik})$ 是无限集, 所以存在 Y 中非平凡的序列 $\{y_i\}$, 使 $y_i \in \bigcap_{k\leqslant i} f(B_{j_ik}) - \{y_0\}$, 因此 $y_i \in fg^{-1}(V_i)$. 故 $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是 Y 的闭离散集. 另一方面, $y_i \in f(B_{j_i1})$, 于是存在 $x_i' \in f^{-1}(y_i) \cap B_{j_i1}$. 由 $\{F_{ni}\}$ 的构造, $\{B_{j_i1}\}$ 是可数紧集 $g^{-1}g(x_1)$ 在 X 中的网, 从而 $\{x_i'\}$ 有聚点 x_0, 那么 $\{f(x_i')\}$ 有聚点 $f(x_0)$, 即 $\{y_i\}$ 有聚点, 矛盾. 因此, X 满足可数紧型分解定理.

本节第三部分, 讨论半层空间的映射性质.

命题 3.3.15 设映射 $f: X \to Y$.

(1) 若 f 是闭映射, 如果 X 是 β 空间, 则 Y 是 β 空间 [385];

(2) 若 f 是逆可数紧映射, 如果 Y 是 β 空间, 则 X 是 β 空间 [36].

证明 利用命题 1.7.2 得 (1). 设 g 是 Y 的 β 函数. 定义 X 的 g 函数 $h: \mathbb{N} \times X \to \tau(X)$ 为 $h(n, x) = f^{-1}(g(n, f(x)))$. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x \in h(n, x_n)$, 那么 $f(x) \in g(n, f(x_n))$, 于是 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中有聚点. 因为 f 是逆可数紧映射, 所以 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点. 故 X 是 β 空间.

命题 3.3.16 设映射 $f: X \to Y$.

(1) 若 f 是闭映射, 如果 X 是半层空间, 则 Y 是半层空间 [94];

(2) 若 f 是逆紧映射, 如果 Y 是半层空间且 X 具有 G_δ 对角线, 则 X 是半层空间[63].

证明 由定义 1.4.3, 直接验证得 (1). 对 (2), 由于 Y 是次仿紧空间, 所以 X 是次仿紧空间 (见附录 A 命题 3.2). 由命题 1.5.18, 3.3.15 和定理 1.7.7, X 是半层空间.

引理 3.3.17[361] 设 X 是可数仿紧空间. 若存在 X 的闭集 B 和闭集列 $\{B_n\}$, 满足

(1) $B \cap B_n = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$;

(2) 若 $B \subset V \in \tau$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使当 $n \geqslant m$ 时 $B_n \subset V$.

则 $B \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}$ 是 X 的可数紧集.

证明 若不然, 存在 $B \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}$ 的闭离散集 $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, 于是存在 X 的局部有限的开集列 $\{U_k\}$, 使 $x_k \in U_k$. 因为 $x_k \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}$, 对无限个 n, 有 $U_k \cap B_n \neq \varnothing$, 从而存在序列 $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ 和 $\{y_k\} \subset X$, 使 $y_k \in U_k \cap B_{n_k}$. 令 $S = \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. 则 S 是 X 的闭集, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使当 $n \geqslant m$ 时, $B_n \subset X - S$,

因此 $y_m \in B_{n_m} \subset X - \{y_m\}$, 矛盾.

定理 3.3.18[361] 可数仿紧的半层空间满足紧型分解定理.

证明 设 $F : \mathbb{N} \times \tau \to \tau^c$ 是可数仿紧空间 X 的半层对应. 让 $f : X \to Y$ 是闭映射. 对 $y \in Y, n \in \mathbb{N}$, 令

$$V_y = X - f^{-1}(y),\ U(n,y) = X - F(n, V_y),$$

则 $f^{-1}(y) \subset U(n,y)$. 所以存在 y 的开邻域 $O(n,y)$, 使 $f^{-1}(O(n,y)) \subset U(n,y)$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$Y_n = \{y \in Y : \forall y' \in Y - \{y\}, y \notin O(n,y')\}.$$

那么 $Y_n \cap O(n,y') \subset \{y'\}$. 因而 Y_n 是 Y 的闭离散集.

设 $y \in Y - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $y_n \neq y$, 使 $y \in O(n,y_n)$. 先证明 $\{y_n\}$ 满足 $(*)$: 对 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$, $f^{-1}(y) \subset \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_{n_k})}$.

若不然, 则存在 $x \in f^{-1}(y) - \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_{n_k})}$. 令 $U = X - \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_{n_k})}$. 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使 $x \in F(k,U)$, 于是 $U \subset X - f^{-1}(y_{n_k}) = V_{y_{n_k}}$, 所以

$$f^{-1}(O(n_k, y_{n_k})) \subset U(n_k, y_{n_k}) = X - F(n_k, V_{y_{n_k}}) \subset X - F(n_k, U).$$

另一方面, $y \in O(n_k, y_{n_k})$ 且 $f^{-1}(y) \subset U(n_k, y_{n_k})$, 于是 $x \in F(k,U) \cap f^{-1}(y) \subset F(n_k, U) \cap U(n_k, y_{n_k}) = \varnothing$, 矛盾.

设 $f^{-1}(y) \subset V \in \tau$. 存在 y 的开邻域 O_y, 使 $f^{-1}(O_y) \subset V$. 若存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$, 使 $f^{-1}(y_{n_k}) \not\subset f^{-1}(O_y)$, 则 $f^{-1}(O_y) \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_{n_k})) = \varnothing$, 所以 $f^{-1}(y) \cap \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_{n_k})} = \varnothing$, 与 $(*)$ 矛盾. 从而存在 $m \in \mathbb{N}$, 使当 $n \geqslant m$ 时, $f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(O_y) \subset V$. 由 $(*)$ 及引理 3.3.17, $f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n)}$ 是紧集.

问题 3.3.19 (1) 可数仿紧半层空间的逆可数紧逆象是否满足可数紧型分解定理[140]?

(2) 正则半层空间是否满足紧型分解定理?

下面介绍与半层空间相关的半度量空间的映射性质.

引理 3.3.20[101] 设 $f : X \to Y$ 是逆紧映射, Y 是第一可数空间. 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的第一可数子集, 则 X 是第一可数空间.

证明 对 $x \in X$, 记 $y = f(x)$. 设 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 y 的递减的局部基, $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的开集列, 使 $\{V_i \cap f^{-1}(y)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 $f^{-1}(y)$ 中的局部基. 对 $i \in \mathbb{N}$, 让 $F_i(x) = f^{-1}(y) - V_i$. 则 $F_i(x) \in \mathscr{K}(X)$, 于是存在 X 的不相交开集 W_i, G_i, 使 $x \in W_i$ 且 $F_i(x) \subset G_i$, 那么 $f^{-1}(y) \subset V_i \cup G_i$, 于是存在 $k_i \in \mathbb{N}$, 使 $f^{-1}(U_{k_i}) \subset V_i \cup G_i$, 从而 $(X - V_i) \cap f^{-1}(U_{k_i}) \subset G_i$. 不妨设 $W_i \subset V_i$ 且 $W_{i+1} \subset W_i$. 往证 $\{W_i \cap f^{-1}(U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的局部基. 设 $x_i \in W_i \cap f^{-1}(U_i)$. 若 x_0 是 $\{x_i\}$ 的

聚点, 由于 $f(x_i) \in U_i$, 于是 $f(x_i) \to y$, 所以 $x_0 \in f^{-1}(y)$. 如果 $x_0 \neq x$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $x_0 \in X - V_n$, 于是 $x_0 \in G_n$, 从而有无限项 $x_i \in W_n \cap G_n = \varnothing$, 矛盾. 因而, $x_0 = x$, 即 $\{x_i\}$ 至多只能以 x 为聚点. 若 $x_i \nrightarrow x$, 那么存在 X 的离散子列 $\{x_{i_n}\}$, 由于 $f^{-1}(y)$ 为紧, 不妨设 $x_{i_n} \notin f^{-1}(y)$, 于是 $\{f(x_{i_n})\}$ 在 Y 中离散, 矛盾. 故 X 是第一可数空间.

由推论 1.4.5, 得到半度量空间的映射定理.

推论 3.3.21 设映射 $f: X \to Y$.

(1) 若 f 是闭映射, 如果 X 是半度量空间, 则 Y 是半度量空间当且仅当 Y 是第一可数空间 [94].

(2) 若 f 是逆紧映射, 如果 Y 是半度量空间且 X 具有 G_δ 对角线, 则 X 是半度量空间 [63].

问题 3.3.22[71, 94] Fréchet 的半层空间是否可表为半度量空间的闭映象?

问题 3.3.23[379] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 如果 X 是对称度量空间, Y 是 g 第一可数空间, 那么 Y 是否是对称度量空间?

例 3.3.24 σ 空间类.

(1) $\sigma^\sharp \not\Rightarrow$ 具有 σ 局部有限闭 p 网, 如 Isbell-Mrówka 空间 $\psi(D)$, 其中 $|D| > \mathbf{c}$ (例 1.8.4).

(2) 半度量 $\not\Rightarrow \Sigma^\sharp$, 如领结空间 (例 1.8.2).

(3) 仿紧, $\Sigma \not\Rightarrow$ 半层空间的逆紧逆象, 如 3.2.37(2) 中的空间 X. 由推论 3.2.27, 3.3.2 和定理 3.3.14, X 不是半层空间的逆紧逆象.

(4) $\sigma^\sharp \not\Rightarrow$ 具有 G_δ 对角线 [334].

记 τ^* 是 $\mathbb{R}$ 的欧氏拓扑. 取 X 是实数集 $\mathbb{R}$. X 赋予下述拓扑 τ (关于 $\mathbb{P}$ 的 Michael 直线拓扑, 见例 1.8.5): $G \in \tau$ 当且仅当存在 $U \in \tau^*, A \subset \mathbb{P}$, 使 $G = U \cup A$. 令 $X_1 = \mathbb{R} \times \{1\}$. 定义 $f: X \to X_1$ 为 $f(x) = (x, 1)$. 赋予 X_1 拓扑, 使 f 是同胚映射. 令 $Z = X \oplus X_1$. 对 $x \in \mathbb{Q}$, 将 Z 中的每两点 $x, f(x)$ 贴成一点得到的商空间记为 Y. 让 $g: Z \to Y$ 是自然商映射. 则 g 是有限到一的闭映射.

(24.1) Y 是 $\sigma^\sharp$ 空间. 由 Michael 直线 (例 1.8.5) 类似的证法, X 是具有 σ 互不相交基的仿紧空间, 于是 Z 是具有 σ 互不相交基的仿紧空间. 由命题 1.7.12 和 3.3.9, Y 是 $\sigma^\sharp$ 空间.

(24.2) Y 不具有 G_δ 对角线. 若不然, 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 Y 的 G_δ 对角线序列. 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $P_n = \{x \in X - \mathbb{Q} : gf(x) \notin \mathrm{st}(g(x), \mathscr{U}_n)\}$. 则 $X - \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. 由 τ^* 的第二范畴性, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 的开区间 J, 使 $J \subset \mathrm{cl}_{\tau^*}(P_m)$. 取 $q \in J \cap \mathbb{Q}$. 存在 $U \in \mathscr{U}_m$, 使 $g(x) \in U$. 这时 $gf(x) \in U$, 于是存在 $V \in \tau$, 使 $x \in V \subset J$ 且 $g(V \cup f(V)) \subset U$. 由 τ 的定义, $z \in V \cap P_m$, 于是 $\{g(z), gf(z)\} \subset U$, 从而

$gf(z) \in \mathrm{st}(g(z), \mathscr{U}_m)$, 矛盾. 故 Y 不具有 G_δ 对角线.

(5) G_δ 对角线, 次仿紧 $\not\Rightarrow G_\delta^*$ 对角线 [365].

取 $Y = [0, \omega_1]$. 赋予 Y 下述拓扑: Y 的唯一聚点 ω_1 在 Y 的邻域取为序拓扑下的邻域. 则 $\{\omega_1\}$ 不是 Y 的 G_δ 集. 记 $S = [0, \omega_1)$, 令 $X = Y \cup (S \times \mathbb{N})$. 赋予 X 下述拓扑: $S \times \mathbb{N}$ 是 X 的开离散子空间; 对 $\beta \in S$, β 的邻域基元形如 $\{\beta\} \cup \{(\beta, k) : k \geqslant n\}, n \in \mathbb{N}$; ω_1 的邻域基元形如 $W(n, \alpha) = \{\omega_1\} \cup ((\alpha, \omega_1) \times \{k \in \mathbb{N} : k \geqslant n\}), n \in \mathbb{N}$ 且 α 是可数序数. 因为在 X 中 $\overline{W(n, \alpha)} = (\alpha, \omega_1] \cup W(n, \alpha)$, 所以 X 不是正则空间. 由于 $[0, \omega_1]$ 及 $S \times \{n\}$ 是 X 的闭离散子空间, 于是 X 是 σ 闭离散空间, 从而 X 是具有 G_δ 对角线的次仿紧空间.

如果 X 具有 G_δ^* 对角线, 则 X 有开覆盖列 $\{\mathscr{G}_n\}$, 使 $\{\omega_1\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(\omega_1, \mathscr{G}_n)}$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 不妨设存在 $k_n \in \mathbb{N}$ 和可数序数 α_n, 使 $\omega_1 \in W(k_n, \alpha_n) \in \mathscr{G}_n$. 从而 $\omega_1 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, \omega_1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{W(k_n, \alpha_n)} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(\omega_1, \mathscr{G}_n)} = \{\omega_1\}$, 因此 $\{\omega_1\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, \omega_1]$, 矛盾. 故 X 不具有 G_δ^* 对角线.

(6) 满足一致 (G) $\not\Rightarrow$ 点 G_δ 性质 [44].

设 D 是基数为 $\aleph_1$ 的集合. 让 $\omega D = \{\infty\} \cup D$ 是离散空间 D 的一点紧化. 则 $\{\infty\}$ 不是 ωD 的 G_δ 集. 对 $x \in \omega D$, 令

$$\mathscr{W}_x = \begin{cases} \{\{\infty\}\}, & x = \infty, \\ \{\{x\}, \{x, \infty\}\}, & x \neq \infty. \end{cases}$$

那么集族 $\mathscr{W} = \{\mathscr{W}_x : x \in \omega D\}$ 满足一致 (G) 条件.

例 3.3.25　σ 空间类与映射.

(1) 闭映射不保持 $\sigma^\sharp$ 空间性质.

取 X 是例 3.3.24(4) 中的空间 X. 则 X 的闭集 $\mathbb{Q}$ 不是 X 的 G_δ 集. 让 $h : X \to X/\mathbb{Q}$ 是自然商映射. 那么 h 是闭映射. 由于 $X/\mathbb{Q}$ 不具有点 G_δ 性质, 于是它不是 $\sigma^\sharp$ 空间.

(2) 具有可数闭网的空间不满足紧型分解定理 [84].

取 $X = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$. 赋予 X 以 $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 的欧氏开集及形如 $X - (\{s\} \times (0, 1]), \forall s \in \mathbb{I}$, 的集合作为子基生成 X 的拓扑. 则 X 不是正则空间. 在欧氏拓扑下, $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 的可数闭邻域基及 $\mathbb{I} \times \{0\}$ 的可数闭邻域基之并构成了 X 的可数闭网, 所以 X 是半层空间. 让 $f = \pi_1 : X \to \mathbb{I}$. 则 f 是闭映射, 并且对 $s \in \mathbb{I}, f^{-1}(s)$ 不是 X 的紧集, 于是 X 不满足紧型分解定理.

3.4　k 半层空间

半层空间类与 σ 空间类的关系, 事实上是研究 σ 垫状集族与 σ 闭包保持集族间关系的深化. 对这两类集族的探讨产生了一般拓扑学中辉煌的一页. Michael[276] 对仿紧性的刻画, Junnila[189] 关于次仿紧空间的特征以及 Junnila-Katuta 问题 (见问题 3.2.7)都足以说明这一研究的困难性与重要性. 相应于网的情形, 已经知道由这两种集族性质刻画的空间是不等价的. 本节讨论 k 网的情形, 即 k 半层空间与具有 σ 闭包保持 k 网的空间. 至于基的情形, 它们是著名的 M_3 空间与 M_1 空间的等价性问题, 这是 3.5节讨论的中心议题.

对具有 σ 闭包保持 k 网的空间, 有与 k 半层空间相平行的刻画.

命题 3.4.1[194]　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 闭包保持伪基;

(2) X 具有 σ 闭包保持 cs^* 网;

(3) X 存在 k 半层函数 g 满足: 对 X 的点 x, y 及 $n\in\mathbb{N}$, 若 $y\in g(n,x)$, 则 $g(n,y)\subset g(n,x)$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的闭 cs^* 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是闭包保持的. 定义 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 为 $g(n,x)=X-\cup\{P\in\mathscr{P}_i: x\notin P, i\leqslant n\}$. 则 g 是 X 的 k 半层函数 (见命题 1.4.15), 并且对 X 的点 x,y 及 $n\in\mathbb{N}$, 若 $y\in g(n,x)$, 则 $g(n,y)\subset g(n,x)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 g 是 X 上满足 (3) 的 g 函数. 对 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $\mathscr{P}_n=\{X-g(n,A): A\subset X\}$. 则 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的闭包保持闭集族. 对 X 的紧集 $K\subset U\in\tau$, 由于 g 是 k 半层函数, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $K\cap g(m,X-U)=\varnothing$, 那么 $K\subset X-g(m,X-U)\subset U$. 所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ 闭包保持伪基.

由此, 具有 σ 闭包保持 k 网的正则空间 $\Rightarrow$ k 半层空间 $\Rightarrow$ σ 空间.

问题 3.4.2[121]　k 半层空间是否具有 σ 闭包保持 k 网?

定理 3.4.3[125]　Fréchet 的 k 半层空间是层空间.

证明　由定理 1.4.14, 只须证 Fréchet 的 k 半层空间 X 是单调正规空间. 设 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 X 的对伪基, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是垫状族且 $\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}$. 如果 H, K 是 X 的不相交闭集, 置

$$\begin{aligned}U_n=&\cup\{F_1:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_n, F_2\cap K=\varnothing\}-\\&\cup\{F_1:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_n, F_2\cap H=\varnothing\},\ n\in\mathbb{N};\\D(H,K)=&\left(\bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}}U_n\right)^{\circ}.\end{aligned}$$

往证 D 是 X 的单调正规算子. 这只须验证 $H\subset D(H,K)\subset\overline{D(H,K)}\subset X-K$.

如果存在 $x \in H - D(H,K) \subset \overline{(X-K)\cap(X-\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n)}$, 则存在 $X-(K\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n))$ 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 于是存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $(P_1,P_2)\in\mathscr{F}_m$, 使 $\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subset P_1\subset P_2\subset X-K$, 从而 $P_2\cap K=\varnothing$. 因为 $x\in H$, 所以

$$\begin{aligned}x &\in X-\cup\{F_2:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_m, F_2\cap H=\varnothing\}\\ &\subset X-\overline{\cup\{F_1:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_m, F_2\cap H=\varnothing\}}.\end{aligned}$$

因而存在 $k\in\mathbb{N}$, 使当 $n\geqslant k$ 时, $x_n\in X-\overline{\cup\{F_1:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_m,F_2\cap H=\varnothing\}}$, 于是 $x_n\in P_1-\cup\{F_1:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_m,F_2\cap H=\varnothing\}\subset U_m$, 矛盾. 故 $H\subset D(H,K)$.

如果存在 $x\in\overline{D(H,K)}\cap K\subset\overline{D(H,K)-H}$, 则存在 $D(H,K)-H$ 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 于是存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $(P_1,P_2)\in\mathscr{F}_m$, 使 $\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subset P_1\subset P_2\subset X-H$, 从而当 $n\geqslant m$ 时, $U_n\subset X-P_1$, 所以 $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\bigcup_{j\leqslant m}U_j$, 那么 $x\in\bigcup_{j\leqslant m}\overline{U}_j$, 故有 $j\leqslant m$, 使 $x\in\overline{U}_j\subset\cup\{F_2:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_j,F_2\cap K=\varnothing\}\subset X-K$, 矛盾. 因此 $\overline{D(H,K)}\subset X-K$.

推论 3.4.4　满足下述条件之一的 k 半层空间是可度量空间.

(1) 具有 p 序列 [160].

(2) 点可数基.

证明　设 X 是 k 半层空间.

(1) 若 X 具有 p 序列, 由定理 2.2.18, X 是 wΔ 空间. 再由定理 1.7.7 和 3.4.3, X 是可展的层空间. 由 Bing 度量化准则, X 是可度量空间.

(2) 若 X 具有点可数基, 则 X 是半度量空间. 由定理 1.2.11 和 3.4.3, X 是可展的层空间, 所以 X 是可度量空间.

k 半层条件是很典型的度量化因子. 如, Nagata[317] 证明了空间 X是可度量空间当且仅当 X 具有 k 半层函数 g, 满足 Nagata 条件: 对 $Y\subset X$, $\overline{Y}\subset\cup\{g^2(n,y):y\in Y\}$, 其中 $g^2(n,y)=\cup\{g(n,x):x\in g(n,y)\}$. 该命题的几种变换形式仍是正确的. 如, 把 k 半层函数加强为层函数 g, 且满足对 $Y\subset X$, $\overline{Y}\subset\cup\{\overline{g^2(n,y)}:y\in Y\}$[129]; 或把 k 半层函数 g 换为: $x\in g^3(n,x_n)\Rightarrow x_n\to x$[407]. Lašnev 空间有 k 半层函数 g, 满足对 $Y\subset X$, $\overline{Y}\subset\cup\{\overline{g^2(n,y)}:y\in Y\}$[129]. 恽自求 [407] 构造例子说明 k 半层函数不可换为定理 3.3.1 中刻画 σ 空间的条件 (5): $x\in g^2(n,x_n)\Rightarrow x_n\to x$.

问题 3.4.5　具有点可数弱基, 或 σ 局部可数弱基的 k 半层空间是否是 g 可度量空间?

X 称为 ortho 紧空间, 若 X 的任一开覆盖有内部保持的开加细. 设函数 $G:X\to\tau(X)$, 对 $x\in X$, 记

$$G^2(x)=\cup\{G(y):y\in G(x)\},$$

$$G^3(x)=\cup\{G(z):z\in G^2(x)\}.$$

引理 3.4.6[188]　设 $G:X\to\tau(X)$ 是亚紧 (ortho 紧) 半层空间 X 的邻域指派. 则存在 X 的点有限 (内部保持) 的开覆盖 $\mathscr{V}$, 使对 $x\in X$, $\cap(\mathscr{V})_x\subset G^3(x)$.

证明　设 g 是 X 的半层函数, 并且 $g(1,x)\subset G(x)$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{U}_k=\{g(k,x):x\in X\}$, 那么 $\mathscr{U}_k$ 具有点有限 (内部保持) 的开加细 $\mathscr{W}_k$. 置

$$H_k=\{x\in X:x\in g(k,y)\Rightarrow y\in G(x)\}.$$

则 $X=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}H_k$. 对 $x\in X$, 记 $k(x)=\min\{n\in\mathbb{N}:x\in\overline{H}_n\}$. 定义

$$Q_n(x)=\cap(\textstyle\bigcup_{i\leqslant n}\mathscr{W}_i)_x,\ n\in\mathbb{N};$$
$$V(x)=Q_{k(x)}(x)-\textstyle\bigcup_{i<k(x)}\overline{H}_i;$$
$$\mathscr{V}=\{V(x):x\in X\}.$$

则 $\mathscr{V}$ 是 X 的点有限 (内部保持) 开覆盖. 对 $x\in X$, 让 $m=k(x)$. 那么 $x\in\overline{H}_m$, 于是存在 $z\in H_m\cap g(m,x)\cap Q_m(x)$, 从而 $z\in G(x)$ 且对某个 $y\in X$, $z\in Q_m(x)\subset g(m,y)\subset G(y)$, 因此 $y\in G(z)$. 故 $\cap(\mathscr{V})_x\subset V(x)\subset Q_m(x)\subset G(y)\subset G^3(x)$.

命题 3.4.7[219]　ortho 紧的 k 半层空间具有 σ 闭包保持 k 网.

证明　设 g 是 ortho 紧空间 X 的 k 半层函数. 易验证, g^3 仍是 X 的 k 半层函数. 由引理 3.4.6, 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 X 的内部保持开覆盖 $\mathscr{V}_n$, 使 $\cap(\mathscr{V}_n)_x\subset g^3(n,x)$. 定义 $h:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 为 $h(n,x)=\cap(\bigcup_{i\leqslant n}\mathscr{V}_i)_x$. 那么 h 是 X 的 g 函数. 由于 $h(n,x)\subset g^3(n,x)$, h 是 X 的 k 半层函数. 又由于 $\mathscr{V}_n$ 是内部保持集族, 于是对 X 的点 x,y, 及 $n\in\mathbb{N}$, 若 $y\in h(n,x)$, 则 $h(n,y)\subset h(n,x)$. 由命题 3.4.1, X 具有 σ 闭包保持 k 网.

下面讨论 k 半层空间的覆盖性质.

定理 3.4.8　k 半层空间的开覆盖具有点可数的序列开加细.

证明　设 $F:\mathbb{N}\times\tau\to\tau^c$ 是空间 X 的 k 半层对应.

(8.1) X 的离散闭集族 $\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 有点可数的序列开扩张.

按下述方式归纳定义扩张集族.

$$P^*_\alpha(\varnothing)=F_\alpha,$$
$$P_\alpha(\varnothing)=P^*_\alpha(\varnothing)-\overline{\textstyle\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}}P^*_\beta(\varnothing)},$$
$$\mathscr{P}(\varnothing)=\{P_\alpha(\varnothing)\}_{\alpha\in\Lambda}.$$

对 $\delta\in\mathbb{N}^{<\omega}$, 设 $\mathscr{P}(\delta)$ 已经定义. 下面定义 $\mathscr{P}(\delta n),n\in\mathbb{N}$. 记 $\mathscr{P}(\delta)=\{P_\alpha(\delta)\}_{\alpha\in\Lambda}$. 定义

$$P^*_\alpha(\delta n)=F(n,X-\overline{\textstyle\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}}P^*_\beta(\delta)}),$$
$$P_\alpha(\delta n)=P^*_\alpha(\delta n)-\overline{\textstyle\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}}P^*_\beta(\delta n)},$$
$$\mathscr{P}(\delta n)=\{P_\alpha(\delta n)\}_{\alpha\in\Lambda}.$$

令 $U_\alpha=\cup\{P_\alpha(\delta):\delta\in\mathbb{N}^{<\omega}\}$, $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 则 $\mathscr{U}$ 是所求的集族.

显然, $F_\alpha = P_\alpha(\varnothing) \subset U_\alpha$. 下面证明 U_α 是序列开集. 设序列 $S \to x \in U_\alpha$. 存在 $\delta \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 使 $x \in P_\alpha(\delta)$. 让 $M_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}} P_\beta^*(\delta)}$. 则 $x \notin M_\alpha$, 于是 S 终于某 $F(m, X - M_\alpha) = P_\alpha^*(\delta m)$. 如果

$$\begin{aligned} x \in \overline{\textstyle\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}} P_\beta^*(\delta m)} &= \overline{\textstyle\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}} F(m, X - M_\beta)} \\ &\subset F(m, \textstyle\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}}(X - M_\beta)) \subset \textstyle\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}}(X - M_\beta), \end{aligned}$$

则存在 $\beta \in \Lambda - \{\alpha\}$, 使 $x \in X - M_\beta \subset X - P_\alpha^*(\delta) \subset X - P_\alpha(\delta)$, 矛盾. 故 $x \in X - \overline{\bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}} P_\beta^*(\delta m)}$, 所以 S 终于 $P_\alpha(\delta m) \subset U_\alpha$.

若 $\mathscr{U}$ 不是点可数的, 那么存在 $x \in X, \delta \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 使对不可数个 α 有 $x \in P_\alpha(\delta)$. 这与 $\{P_\alpha(\delta)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的互不相交性矛盾.

(8.2) X 是亚 Lindelöf 空间.

对 X 的开覆盖 $\mathscr{W}$, 由次仿紧性, $\mathscr{W}$ 有闭加细 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_i$, 其中 $\mathscr{F}_i = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_i}$ 是离散的. $\mathscr{F}_i$ 有点可数的序列开扩张 $\mathscr{U}_i = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_i}$. 取 $W_\alpha \in \mathscr{W}$, 使 $F_\alpha \subset W_\alpha$. 则 $\bigcup_{i\in\mathbb{N},\alpha\in\Lambda_i} W_\alpha \cap U_\alpha$ 是 $\mathscr{W}$ 的点可数的序列开加细.

因为 k 半层的 k 空间性质是开遗传性质, 由定理 3.4.8 有

推论 3.4.9[242] k 半层的 k 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

引理 3.4.10[242] k 半层空间 X 存在对应 $H : \mathbb{N} \times \mathscr{P}(X) \to \tau^c$, 满足

(1) $H(n, W) \subset H(n+1, W) \subset W$;

(2) $V \subset W \Rightarrow H(n, V) \subset H(n, W)$;

(3) 若 W 是 x 的序列邻域, 则收敛于 x 的序列是终于某 $H(m, W)$;

(4) 若 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的互不相交族且 $n \in \mathbb{N}$, 则 $\{H(n, G_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是离散族.

证明 设 g 是 X 的 k 半层函数. 定义 $H : \mathbb{N} \times \mathscr{P}(X) \to \tau^c$ 为 $H(n, W) = X - g(n, X - W)$.

设 W 是 x 的序列邻域且 $x_n \to x$. 若存在 $x_{n_i} \in X - H(i, W) = g(i, X - W)$, 则存在 $y_i \in X - W$, 使 $x_{n_i} \in g(i, y_i)$, 那么 $y_i \to x$, 矛盾. 从而 $\{x_n\}$ 是终于某 $H(m, W)$.

设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的互不相交族. 对 $x \in X$, 让

$$V = X - H(n, \cup\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda, x \notin G_\alpha\}).$$

则 $x \in V \in \tau$. 如果 $x \notin G_\alpha$, 那么 $V \cap H(n, G_\alpha) = \varnothing$. 这表明 $\{H(n, G_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是离散族.

定理 3.4.11[242] k 半层的正规的 k 空间是遗传仿紧空间.

证明 设 k 半层空间 X 是正规的 k 空间. 由于 X 是 perfect 的次仿紧空间, 只须证 X 是集态正规空间. 设 H 是满足引理 3.4.10 要求的对应. 让 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散闭集族.

(11.1) $\mathscr{F}$ 有互不相交的序列邻域扩张.

令 $L_\alpha = \bigcup_{\beta\in\Lambda-\{\alpha\}} F_\beta$, $G_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(H(n,X-L_\alpha)-H(n,X-F_\alpha))$. 则 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是互不相交族. 设序列 $S\to x\in F_\alpha$. 因为 $L_\alpha\cap F_\alpha=\varnothing$, S 终于某 $H(m,X-L_\alpha)$, 且 $x\notin H(m,X-F_\alpha)$, 于是 S 终于 $H(m,X-L_\alpha)-H(m,X-F_\alpha)\subset G_\alpha$.

(11.2) $\mathscr{F}$ 有离散的序列邻域闭扩张.

由于 $H(n,X-F_\alpha)\cap F_\alpha=\varnothing$, 存在 $V_\alpha(n)\in\tau$, 使

$$F_\alpha\subset V_\alpha(n)\subset\overline{V_\alpha(n)}\subset X-H(n,X-F_\alpha).$$

让 $F_\alpha(n)=H(n,G_\alpha)\cap\overline{V_\alpha(n)}$, $W_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_\alpha(n)$. 则 W_α 是 F_α 的序列邻域. 事实上, 若序列 $S\to x\in F_\alpha$, 则 S 终于某 $H(m,G_\alpha)\cap V_\alpha(m)\subset F_\alpha(m)\subset W_\alpha$.

让 $\mathscr{W}=\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 则 $\mathscr{W}$ 是互不相交的, 下面证明它是闭包保持的闭集族. 对 $\Lambda'\subset\Lambda$, 若序列 $S\to x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$, 则 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha$, 于是 S 终于某 $H(m,X-\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha)$, 且对 $\alpha\in\Lambda', n\geqslant m$, 有 $H(m,X-F_\alpha)\cap F_\alpha(n)=\varnothing$. 令 $E(m,\Lambda')=\bigcup_{\alpha\in\Lambda',n<m}F_\alpha(n)$. 由引理 3.4.10, $\{F_\alpha(n)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是闭离散的, 于是 $E(m,\Lambda')$ 是闭的且 $x\notin E(m,\Lambda')$, 从而 S 终于 $X-E(m,\Lambda')$, 所以 S 终于 $X-\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$, 即 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$ 是 (序列) 闭的.

(11.3) X 是集态正规空间.

设 $\mathscr{H}_1$ 是 X 的离散闭集族. 存在离散闭集族列 $\{\mathscr{H}_n\}$, 使 $\mathscr{H}_{n+1}$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的离散的序列邻域闭扩张. 记 $\mathscr{H}_n=\{H_{\alpha n}\}_{\alpha\in\Lambda}, H_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_{\alpha n}, \mathscr{H}=\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 设序列 $S\to x\in H_\alpha$. 那么存在 $i\in\mathbb{N}$, 使 $x\in H_{\alpha i}$, 于是 S 终于 $H_{\alpha i+1}\subset H_\alpha$, 所以 $H_\alpha\in\tau$. 故 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{H}_1$ 的互不相交开扩张.

下面转入讨论 k 半层空间的映射性质.

定理 3.4.12[238] k 半层空间上的闭映射是紧覆盖映射.

证明 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 g 是 X 的 k 半层函数. 对 $y\in K\in\mathscr{K}(Y)$, 取定 $x_y\in f^{-1}(y)$. 令 $E=\{x_y:y\in K\}$. 则 $f(\overline{E})=\overline{f(E)}=K$. 为完成定理的证明, 只须验证 $\overline{E}$ 是可数紧的. 若 $\{x_n\}\subset\overline{E}$, 存在 $z_n\in E\cap g(n,x_n)$. 若无限个 z_n 相同, 不妨设 $z\in g(n,x_n)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点. 若所有的 z_n 互不相同, 则 $f_{|E}$ 是一对一的且 $\{f(z_n)\}$ 有收敛子列, 那么 $\{z_n\}$ 有聚点, 于是 $\{x_n\}$ 有聚点.

推论 3.4.13[127] 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X,Y 都是正则空间. 若 X 是 k 半层空间, 则 Y 是 k 半层空间.

命题 3.4.14[224] 设 $f:X\to Y$ 是伪开紧映射. 若 X 是 k 半层空间, 则 Y 是半层空间.

证明 设函数 $G:\mathbb{N}\times\tau^c(X)\to\tau(X)$ 满足命题 1.4.15(3) 的条件. 定义函数 $D:\mathbb{N}\times\tau^c(Y)\to\tau(Y)$ 为 $D(n,H)=\mathrm{int}(f(G(n,f^{-1}(H))))$. 则 $H\subset D(n,H)$, 于是 $H\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}D(n,H)$. 如果 $y\in Y-H$, 那么 $f^{-1}(y)\cap f^{-1}(H)=\varnothing$. 因为 $f^{-1}(y)$ 是

X 的紧集, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $f^{-1}(y) \cap G(m, f^{-1}(H)) = \varnothing$, 即 $y \notin f(G(m, f^{-1}(H)))$, 从而 $y \notin D(m, H)$. 因此, $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(n, H)$. 由命题 1.4.4, Y 是半层空间.

下面讨论引理 2.7.20 在 k 半层空间上的推广. 套用定理 3.4.11 的证明, 有下述引理.

引理 3.4.15 设 X 是 k 半层空间. 若 $D = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散子集, 则存在 D 的互不相交序列邻域扩张 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足: 对 $\Lambda' \subset \Lambda$, $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda'\} \cup \overline{D}$ 是 X 的序列闭集, 其中 $y_\alpha \in U_\alpha$.

证明 设 H 是 k 半层空间 X 的满足引理 3.4.10 要求的对应. 对 $\alpha \in \Lambda$, 令

$$L_\alpha = \overline{\{x_\beta : \alpha \neq \beta \in \Lambda\}},$$
$$G_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (H(n, X - L_\alpha) - H(n, X - \{x_\alpha\})),$$
$$U_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (H(n, G_\alpha) - H(n, X - \{x_\alpha\})).$$

则 $U_\alpha \subset G_\alpha$ 且 U_α 是 x_α 的序列邻域. 事实上, 若序列 $S \to x_\alpha$, 因为 $x_\alpha \notin L_\alpha$, S 终于某 $H(m, X - L_\alpha)$, 于是 S 终于 $H(m, X - L_\alpha) - H(m, X - \{x_\alpha\}) \subset G_\alpha$. 由引理 3.4.10, S 终于某 $H(k, G_\alpha) - H(k, X - \{x_\alpha\}) \subset U_\alpha$.

易验证, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是互不相交族, 从而 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是互不相交族. 若存在 $\Lambda' \subset \Lambda$, 使 $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda'\} \cup \overline{D}$ 不是 X 的序列闭集, 则存在 $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda'\} - \overline{D}$ 中非平凡的序列 L 收敛于某点 $x \notin \overline{D}$. 不妨设, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $L \subset H(m, X - \overline{D})$. 那么对 $\alpha \in \Lambda, n \geqslant m$, 有 $L \subset H(n, X - \{x_\alpha\})$, 从而 $L \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda, n<m} H(n, G_\alpha)$, 因此存在 L 的无限子集 L' 和 $n < m$, 使 $L' \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} H(n, G_\alpha)$. 由引理 3.4.10(4), L' 是 X 的离散闭集, 矛盾.

定理 3.4.16 设 $f : X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是 k 半层的 k 空间. 若 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω (S_{ω_1}), 则 f 是边缘紧映射 (边缘 L 映射).

证明 对 $y \in Y$, 置 $A = \{x \in \partial f^{-1}(y) :$ 存在 $X - f^{-1}(y)$ 中的序列收敛于 $x\}$.

(16.1) $\overline{A} = \partial f^{-1}(y)$.

若不然, 令 $B = f^{-1}(y) - \overline{A}$, $C = \partial f^{-1}(y) - \overline{A}$. 那么 $\varnothing \neq C \subset B$. 若 X 的序列 K 收敛于某点 $x \in B$, 如果 $x \in \mathrm{int}(f^{-1}(y))$, 则 K 是终于 B 的; 如果 $x \in C$, 那么 $\overline{A} \cup (X - f^{-1}(y))$ 仅含 K 中的有限项, 则 K 也是终于 B 的. 从而 B 是 X 的序列开集, 因此 B 是 X 的开集, 所以 $B \subset \mathrm{int}(f^{-1}(y))$, 故 $C = C \cap \mathrm{int}(f^{-1}(y)) = \varnothing$, 矛盾.

(16.2) 设 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

若 A 不是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集, 则子空间 A 含不可数的离散闭集 $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 存在 D 的互不相交的序列邻域扩张 $\{U_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 满足引理 3.4.15 的要求. 对 $\alpha < \omega_1$ 及 $y_\alpha \in U_\alpha - f^{-1}(y)$, 如果 $\{y_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 中含序列收敛于某点 $x \in \overline{D}$, 由于 D 是 A 的闭集, 于是 $x \in \overline{D} \cap A = D$, 所以存在 $\beta < \omega_1$, 使 $x = x_\beta \in U_\beta$, 那么无限

个 $y_\alpha \in U_\beta$, 矛盾. 由引理 3.4.15, $\{y_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 是 X 的闭离散集. 对 $\alpha < \omega_1$, 存在 $X - f^{-1}(y)$ 的序列 L_α 收敛于 x_α. 则 $\{y\} \cup (\cup\{f(L_\alpha) : \alpha < \omega_1\})$ 是 Y 的同胚于 S_{ω_1} 的闭子空间. 矛盾.

现在, 设 A 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集, 由推论 3.2.15 和命题 1.5.8, A 是可分的, 于是 $\overline{A} = \partial f^{-1}(y)$ 是可分的. 由推论 3.4.9, $\partial f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 空间.

(16.3) 设 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω.

由 (16.2) 类似的证明, A 的任何可数无限子集在 A 中有聚点, 于是 A 是可数紧的, 从而 A 是紧的. 故 $\partial f^{-1}(y) = \overline{A}$ 是紧的.

问题 3.4.17 k 半层空间是否满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理?

例 3.4.18 k 半层空间类.

(1) 局部紧, 伪紧, 可展 $\not\Rightarrow$ 亚 Lindelöf 空间, 如 Isbell-Mrówka 空间 $\psi(\mathbb{N})$ (例 1.8.4).

(2) k 半层 $\not\Rightarrow$ 亚 Lindelöf 空间 [218].

取 $X = \mathbb{R} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q} \times \{1/n\})$. X 赋予下述拓扑:

(18.1) $X - \mathbb{R}$ 的点是 X 的孤立点;

(18.2) 对 $x \in \mathbb{R}$, x 的邻域基元形如

$$\{x\} \cup (\bigcup_{n\geqslant m} ([a_{xn}, x) \cap \mathbb{Q}) \times \{1/n\}), \text{ 其中 } m \in \mathbb{N}, a_{xn} < x.$$

则 X 是正则空间.

由于 $\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{Q} \times \{1/n\}$ 是 X 的闭离散子空间, 所以 X 是 σ 闭离散空间. 若 X 存在无限紧集 K, 那么对无限个 n 有 $K \cap (\mathbb{Q} \times \{1/n\}) \neq \varnothing$. 再由 K 是度量空间, 存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_i\}$ 及 $x_i \in K \cap (\mathbb{Q} \times \{1/n_i\})$, 使 $x_i \to x_0 \in \mathbb{R}$. 对 $i \in \mathbb{N}$, 记 $x_i = (r_i, 1/n_i)$. 由 x_0 邻域的构成, 不妨设 $r_i < x_0$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$q_n = \begin{cases} (r_i + x_0)/2, & n = n_i, \\ x_0 - 1, & n = n_i, i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

并且定义

$$U = \{x_0\} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ([q_n, x_0) \cap \mathbb{Q}) \times \{1/n\}).$$

那么 $x_0 \in U \in \tau(X)$, 并且所有 $x_i \notin U$, 矛盾. 因此 X 的所有紧集是有限集. 又由于 X 是 σ 闭离散空间, 所以 X 具有 σ 闭包保持 k 网, 故 X 是 k 半层空间. 利用 X 的可分性及 $\mathbb{R}$ 的闭离散性, X 既不是正规空间, 也不是亚 Lindelöf 空间.

(3) Foged[113] 已构造例子: k 半层的 k 空间未必是正规空间; 在 MA+¬CH 假设下, 存在非仿紧的 k 半层的正规空间.

例 3.4.19 k 半层空间类与映射.

(1) 存在闭 L 映射 $f: X \to Y$, 其中 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 不含闭子空间同胚于 S_ω, 但 f 不是边缘紧映射.

取 X 是 $\beta\mathbb{N}$ 的满足 $\mathbb{N} \subset X$ 且 $|X - \mathbb{N}| = \aleph_0$ 的子空间. 则 X 具有可数 cs 网, 所以 X 是 $\aleph_0$ 空间. 让 $C = X - \mathbb{N}$. 定义 $f: X \to X/C$ 是自然商映射. 则 f 是闭 L 映射,于是 f 是紧覆盖映射. 因为 X 的紧集都是有限集, 所以 $f(X)$ 的紧集也是有限集, 于是商空间 X/C 不含闭子空间同胚于 S_ω. 由于 $\partial f^{-1}([C]) = C$, 所以 f 不是边缘紧映射.

(2) 存在闭映射 $f: X \to \mathbb{S}_1$, 其中 X 是 Moore 空间, 但 f 不是边缘 L 映射. 如例 2.6.6, 这时 $\partial f^{-1}(0) = \psi(\mathbb{N}) - \mathbb{N}$ 不是 Lindelöf 空间.

(3) 存在闭映射 $f: X \to Y$, 其中 X 是 $\aleph$ 空间, Y 不含闭子空间同胚于 S_ω, 但 f 不是边缘 L 映射 (刘川, 2005).

对 Arens 空间 $S_2 = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ (例 1.8.6), 及 $\alpha < \omega_1$, 令 $X_\alpha = S_2 - \mathbb{N}$. 则 X_α 是仿紧 $\aleph$ 空间. 让 $X = \bigoplus_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, 再让 A 是 X 的全体聚点之集. 则 A 是仿紧 $\aleph$ 空间 X 的闭集. 对商集 $Y = X/A$, 让 $f: X \to Y$ 是自然商映射. 则 f 是闭映射, 从而 f 是紧覆盖映射. 由于 X 的紧集都是有限集, 所以 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω. 但 $\partial f^{-1}([A]) = A$ 不是 Lindelöf 空间.

问题 3.4.20 正规的 k, σ 空间是否是仿紧空间?

问题 3.4.21 具有星可数 k 网的正则的 k 空间是否是 k 半层空间?

问题 3.4.22 k 半层空间的正则的伪开紧映象是否是 σ 空间?

3.5 M_i 空 间

Ceder[79] 引进的 M_i 空间揭开了广义度量空间的研究序幕, 而 Ceder 所提出的 “是否 M_3 空间是 M_2 空间” 以及 “是否 M_2 空间是 M_1 空间” 问题构成了一般拓扑学中最困难的经典性问题之一 [291, 329]. Gruenhage[139], Junnila[188] 独立地证明了 “M_3 空间是 M_2 空间”. 这一成功激励人们以更大的热情倾注于 “是否 M_2 空间是 M_1 空间” 问题的研究, 导致了 20 世纪 70 年代末至 80 年代, M_i 空间研究的迅猛浪潮. 尽管 Ceder 问题没有最终解决, 但是人们对该问题的探索开创了若干方法, 给出了一系列的等价条件, 获得了重要进展. 本节分两部分介绍关于 M_i 空间研究中最重要的成果. 第一部分, 讨论 M_2 空间的特性, 应用 Junnila[188] 的方法证明 M_3 空间是 M_2 空间. 第二部分, 研究 M_1 空间的等价条件, 主要采用 Itō[179, 180] 的技巧和介绍 Mizokami 等 [294, 295] 的工作, 关注遗传 M_1 空间类和每一点具有闭包保持局部基的 M_3 空间类, 利用映射建立了 Ceder 问题解决的判别法则, 产生了 M_1 空间的映射定理.

为了便于了解 M_i 空间研究的来龙去脉, 罗列 1961 年 Ceder[79] 提出的主要问题.

问题 3.5.1 Ceder 问题.

(1) M_2 空间是否是 M_1 空间?

(2) M_3 空间是否是 M_2 空间?

(3) 每一点, 或每一闭集具有闭包保持开邻域基的 M_3 空间是否是 M_1 空间?

(4) M_1 空间的每一闭集是否具有闭包保持开邻域基?

(5) M_1 空间是否具有闭遗传性?

(6) 闭映射或逆紧映射是否保持 M_1 空间?

(7) 若 A 是 M_1 空间 X 的闭子空间, 那么 X/A 是否是 M_1 空间?

(8) 闭映射是否保持 M_2 空间?

首先, 建立 M_2 空间的特性.

命题 3.5.2[59, 79] X 是 M_2 空间当且仅当 X 是仿紧 σ 空间, 并且 X 的每一闭集在 X 中具有 (σ) 闭包保持的拟基.

证明 必要性. 显然, M_2 空间是仿紧 σ 空间. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是 M_2 空间 X 的拟基, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的闭集族. 对 $F\in\tau^c$, 存在 X 中递减的开集列 $\{G_n\}$, 使 $F\subset G_n$ 且 $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{G}_n$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $H_n=\overline{G}_n$, $\mathscr{U}_n=\mathscr{B}_{n|H_n}$. 则 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的闭包保持的闭集族. 由于 $\{H_n:n\in\mathbb{N}\}$ 在 $X-F$ 是局部有限的, 于是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n$ 在 $X-F$ 是闭包保持的. 定义

$$\mathscr{V}=\{\cup\mathscr{U}:\mathscr{U}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n\},$$
$$\mathscr{W}=\{V\in\mathscr{V}:F\subset V^\circ\}.$$

那么 $\mathscr{V}$ 在 $X-F$ 是闭包保持的, 从而 $\mathscr{W}$ 是 X 的闭包保持集族. 设 $x\in F\subset G\in\tau$. 存在 $n_x\in\mathbb{N}$, $B_x\in\mathscr{B}_{n_x}$, 使 $x\in B^\circ_{n_x}\subset B_{n_x}\subset G$. 让 $V=\bigcup_{x\in F}(B_{n_x}\cap H_{n_x})$, 那么 $V\in\mathscr{W}$ 且 $F\subset V^\circ\subset V\subset G$. 因此 $\mathscr{W}$ 是 F 在 X 中的闭包保持拟基.

充分性. 设仿紧 σ 空间 X 的每一闭集在 X 中具有 σ 闭包保持的拟基. 让 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是离散闭集族. 对 $n\in\mathbb{N}$, 记 $\mathscr{P}_n=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 则存在离散开集族 $\mathscr{H}_n=\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$, 使 $P_\alpha\subset H_\alpha$. 对 $\alpha\in\Lambda_n$, 让 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{\alpha k}$ 是 P_α 在 X 中的拟基, 其中 $\mathscr{B}_{\alpha k}$ 是 X 的闭包保持集族且 $\cup\mathscr{B}_{\alpha k}\subset H_\alpha$. 对 $n,k\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{B}_{nk}=\cup\{\mathscr{B}_{\alpha k}:\alpha\in\Lambda_n\}.$$

那么 $\mathscr{B}_{nk}$ 是 X 的闭包保持集族. 对 $x\in U\in\tau$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\Lambda_n$, 使 $x\in P_\alpha\subset U$, 于是存在 $k\in\mathbb{N}$, $B\in\mathscr{B}_{\alpha k}$, 使 $P_\alpha\subset B^\circ\subset B\subset U$, 从而 $x\in B^\circ\subset B\subset U$. 故 $\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_{nk}$ 是 X 的 σ 闭包保持的拟基, 因而 X 是 M_2 空间.

定理 3.5.3[139, 188] M_3 空间是 M_2 空间.

证明　设 g 是 M_3 空间 X 的层函数. 那么 g^3 也是 X 的层函数. 事实上, 若 $y \in X - H \in \tau$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $y \notin \overline{g(m,H)}$, 于是存在 $n \geqslant m$, 使 $y \notin \overline{g(n,\overline{g(m,H)})}$, 从而存在 $k \geqslant n$, 使 $y \notin g(k,\overline{g(n,\overline{g(m,H)})}) \supset g^3(k,H)$. 由引理 3.4.6, 对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 X 的点有限开覆盖 $\mathscr{V}_n$, 使对 $x \in X$ 有 $\cap(\mathscr{V}_n)_x \subset g^3(n,x)$. 定义 $h : \mathbb{N} \times X \to \tau$ 为 $h(n,x) = \cap(\bigcup_{i \leqslant n} \mathscr{V}_i)_x$. 那么 h 是 X 的 g 函数, $h(n,x) \subset g^3(n,x)$, 并且对 X 的点 x, y 及 $n \in \mathbb{N}$, 若 $x \in h(n,y)$, 则 $h(n,x) \subset h(n,y)$. 由命题 1.3.12, X 是 M_2 空间.

从而, M_2 空间类 $=$ M_3 空间类 $=$ 层空间类.

命题 3.5.4[160]　闭映射保持单调正规性质.

证明　设 $f : X \to Y$ 是闭映射, 其中 D_1 是 X 的单调正规算子. 对 Y 中不相交的闭集 H, K, 定义

$$D_2(H,K) = Y - f(X - D_1(f^{-1}(H), f^{-1}(K))).$$

那么 $H \subset D_2(H,K) \in \tau(Y)$. 显然, 若 Y 中不相交的闭集 H', K' 满足 $H \subset H', K \supset K'$, 则 $D_2(H,K) \subset D_2(H',K')$. 若 $y \in K$, 那么

$$y \in Y - \overline{f(D_1(f^{-1}(H), f^{-1}(K)))},$$

而 $D_2(H,K) \subset f(D_1(f^{-1}(H), f^{-1}(K)))$, 所以 $y \notin \overline{D_2(H,K)}$, 从而 $\overline{D_2(H,K)} \subset Y - K$. 故 D_2 是 Y 的单调正规算子, 因此 Y 是单调正规空间.

定理 3.5.5[56]　(1) 闭映射保持 M_3 空间性质.

(2) M_3 空间性质满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理.

证明　由命题 3.5.4, 3.3.16 和定理 1.4.14 得 (1). 由推论 2.2.11 和 2.1.9 得 (2).

本节第二部分, 讨论 M_1 空间类的性质. 首先, 介绍 M_1 空间类的一些子类, 它们是与 Ceder 问题息息相关的. 为了便于叙述起见, 本节中 $\mathscr{P}$ 表示每一点具有闭包保持局部基的 M_3 空间类. 第一可数的 M_3 空间称为 Nagata 空间 [79].

定理 3.5.6[179]　遗传 M_1 空间类 $\subset \mathscr{P}$ 类.

证明　设 X 是遗传 M_1 空间. 对 $x \in X$, 断言: 存在 X 的正则闭集 H_1, H_2, 满足

(6.1) $X = H_1 \cup H_2$;

(6.2) 对 $i = 1, 2$, 若 $x \in H_i$, 则存在子空间 H_i 的开闭集列 $\{H_{in}\}$, 使 $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_{in}$.

事实上, 选取 X 的正则开集列 $\{G_n\}$, 使 $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ 且 $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \subset G_1 = X$. 令

$$H_1 = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{G_{2n-1} - G_{2n}}},$$

$$H_2=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{G_{2n}-G_{2n+1}}}.$$

则 $X=H_1\cup H_2$. 因为 G_n 是 X 的正则开集, 所以 $\overline{G_n-G_{n+1}}=\overline{G_n-\overline{G_{n+1}}}$ 是正则闭集, 从而 H_1,H_2 是 X 的正则闭集. 令

$$H_{1n}=H_1\cap\overline{G}_{2n-1},H_{2n}=H_2\cap\overline{G}_{2n}.$$

那么 $H_{1n}=H_1\cap G_{2n-2},H_{2n}=H_2\cap G_{2n-1}$. 于是 $\{H_{in}\}$ 是子空间 H_i 的开闭集列, 并且若 $x\in H_i$, 那么 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}H_{in}$.

对 $i=1,2$, 若 $x\notin H_i$, 置 $\mathscr{B}_i=\varnothing$. 若 $x\in H_i$, 因为 H_i 是 M_1 空间, 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n$ 是 x 在 H_i 的局部基, 其中 $\mathscr{U}_n$ 是 H_i 的闭包保持集族, 那么 $\mathscr{V}_i=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathscr{U}_{n|G_n})$ 是 x 在 H_i 的闭包保持局部基. 令 $\mathscr{B}_i=\mathscr{V}_i^-$. 则 $\mathscr{B}_i$ 是 x 在 H_i 的闭包保持的正则闭拟基, 这时 $\mathscr{B}_i$ 也是 X 的正则闭集族. 定义

$$\mathscr{B}=\{B_1\cup B_2:B_i\in\mathscr{B}_i,i=1,2\}.$$

由 (6.1), $\mathscr{B}$ 是 x 在 X 的闭包保持的正则闭拟基, 从而 $\mathscr{B}^\circ$ 是 x 在 X 的闭包保持的局部基.

引理 3.5.7[371]　设 X 是 σ 空间. 若 $\mathscr{F}$ 是 X 的闭包保持的闭集族, 则存在 X 的 σ 闭离散的稠集 D, 满足对 $F\in\mathscr{F},F\cap D$ 是 F 的稠集.

证明　设函数 $G:\mathbb{N}\times\tau^c\to\tau$ 满足命题 1.4.4(3) 的要求. 令

$$Q(\mathscr{F}')=\cap\mathscr{F}'-\cup(\mathscr{F}-\mathscr{F}'),\mathscr{F}'\subset\mathscr{F};$$

其中 $Q(\varnothing)=X-\cup\mathscr{F}$. 那么 $\{Q(\mathscr{F}'):\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}\}$ 是 X 的覆盖. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$Q_n(\mathscr{F}')=\cap\mathscr{F}'-G(n,\cup(\mathscr{F}-\mathscr{F}')),\mathscr{F}'\subset\mathscr{F};$$

其中 $Q_n(\varnothing)=X-G(n,\cup\mathscr{F})$. 那么 $Q(\mathscr{F}')=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Q_n(\mathscr{F}')$ 且 $\{Q_n(\mathscr{F}'):\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}\}$ 是 X 的离散闭集族. 事实上, 对 $x\in X$, 定义

$$U=G(n,\{x\})-\cup(\mathscr{F}-(\mathscr{F})_x).$$

则 $x\in U\in\tau$. 对 $(\mathscr{F})_x\neq\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$, 如果存在 $F\in\mathscr{F}'-(\mathscr{F})_x$, 则 $Q_n(\mathscr{F}')\subset F$ 且 $U\subset X-\cup(\mathscr{F}-(\mathscr{F})_x)\subset X-F$, 于是 $Q_n(\mathscr{F}')\cap U=\varnothing$; 如果存在 $F\in(\mathscr{F})_x-\mathscr{F}'$, 那么 $Q_n(\mathscr{F}')\subset X-G(n,\cup(\mathscr{F}-\mathscr{F}'))\subset X-G(n,F)\subset X-G(n,\{x\})$, 从而 $Q_n(\mathscr{F}')\cap U=\varnothing$.

令

$$\mathscr{Q}=\{Q_n(\mathscr{F}'):\mathscr{F}'\subset\mathscr{F},n\in\mathbb{N}\}.$$

则 $\mathscr{Q}$ 是 $\{Q(\mathscr{F}'):\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}\}$ 的 σ 离散闭加细. 设 $\mathscr{H}$ 是 X 的 σ 离散闭网. 对 $H\in\mathscr{H}$, $Q\in\mathscr{Q}$, 若 $H\cap Q\neq\varnothing$, 取定 $x(H,Q)\in H\cap Q$. 定义

$$D=\{x(H,Q):H\in\mathscr{H},Q\in\mathscr{Q},H\cap Q\neq\varnothing\}.$$

则 D 满足引理的要求. 显然, D 是 X 的 σ 闭离散集. 对 $F\in\mathscr{F}$, 及 F 的非空开集 W, 存在 $V\in\tau$, 使 $V\cap F=W$. 取定 $y\in W$. 那么存在 $H\in\mathscr{H},Q\in\mathscr{Q}$, 使 $y\in H\cap Q\subset H\subset V$. 记 $Q=Q_n(\mathscr{F}')$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$. 由于 $Q\cap F\neq\varnothing$, 于

是 $F \in \mathscr{F}'$, 从而 $Q \subset F$, 因此 $x(H,Q) \in H \cap Q \subset V \cap F = W$, 故 $F \cap D$ 是 F 的稠集. 同理可证, D 是 X 的稠集.

定理 3.5.8[180] 若 $X \in \mathscr{P}$ 类, 则 X 的每一闭集在 X 中具有闭包保持的开邻域基.

证明 设 $F \in \tau^c$. 由命题 3.5.2, F 在 X 中具有闭包保持的闭拟基 $\mathscr{U}$. 由引理 3.5.7, X 存在子集 $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, 其中 D_n 是 X 的闭离散子空间, 满足对 $U \in \mathscr{U}, U \cap D$ 在 U 中稠. 对 $n \in \mathbb{N}$, X 有离散开集族 $\{G_x\}_{x\in D_n}$, 使 $x \in G_x$. 对 $x \in D$, 让 $\mathscr{V}_x$ 是 x 的闭包保持的局部基. 不妨设, 对 $x \in D_n$, 有 $\cup\mathscr{V}_x \subset G_x \cap g(n,x)$, 其中 g 是 X 的层函数.

称 φ 是 $U \cap D$ 上的选择函数, 如果函数 $\varphi : U \cap D \to \bigcup_{x\in D} \mathscr{V}_x$ 满足 $\varphi(x) \in \mathscr{V}_x$. 对 $U \in \mathscr{U}$ 及 $U \cap D$ 上的选择函数 φ, 定义

$$B(U,\varphi) = \overline{\cup\{\varphi(x) : x \in U \cap D\}}.$$

置

$$\mathscr{B} = \{B(U,\varphi) : U \in \mathscr{U}, \varphi \text{ 是 } U \cap D \text{ 上的选择函数 }\}.$$

往证 $\mathscr{B}$ 是 F 在 X 的闭包保持的正则闭拟基.

(8.1) $\mathscr{B}$ 是 F 在 X 的正则闭拟基.

显然, $\mathscr{B}$ 是 X 的正则闭集族. 对 $B(U,\varphi) \in \mathscr{B}$, 由于 $U \cap D$ 是 U 的稠集, 所以 $F \subset U^\circ \subset U = \overline{U \cap D} \subset B(U,\varphi)$. 设 $F \subset W \in \tau$. 取 $W' \in \tau$, 使 $F \subset W' \subset \overline{W'} \subset W$. 存在 $U \in \mathscr{U}$, 使 $F \subset U^\circ \subset U \subset W'$. 对 $x \in U \cap D$, 存在 $\phi(x) \in \mathscr{V}_x$, 使 $x \in \phi(x) \subset W'$. 那么 ϕ 是 $U \cap D$ 上的选择函数, 且 $B(U,\phi) \subset \overline{W'} \subset W$.

(8.2) $\mathscr{B}$ 是 X 的闭包保持集族.

对 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}, p \in X - \cup\mathscr{B}'$, 置

$$\mathscr{U}' = \{U \in \mathscr{U} : \text{ 存在 } U \cap D \text{ 上的选择函数 } \varphi, \text{ 使 } B(U,\varphi) \in \mathscr{B}'\}.$$

由于 $U \subset B(U,\varphi)$, 所以 $p \in X - \cup\mathscr{U}' \in \tau$, 于是存在 $k \in \mathbb{N}$, 使 $p \notin \overline{g(k,\cup\mathscr{U}')}$. 设 $H = X - \overline{g(k,\cup\mathscr{U}')}$. 那么 $p \in H \in \tau$. 对 $U \in \mathscr{U}', n \geqslant k$ 及 $x \in U \cap D_n$, 有 $\varphi(x) \subset \cup\mathscr{V}_x \subset g(n,x) \subset g(k,\cup\mathscr{U}') \subset X - H$, 从而对 $B(U,\varphi) \in \mathscr{B}'$, 有

$$B(U,\varphi) \cap H = \overline{\cup\{\varphi(x) : x \in U \cap (\cup\{D_n : n < k\})\}} \cap H.$$

因为 $\{G_x : x \in \bigcup_{n<k} D_n\}$, $\mathscr{V}_x$ 分别是局部有限集族和闭包保持集族, 且 $\cup\mathscr{V}_x \subset G_x$, 所以

$$\mathscr{V} = \cup\{\mathscr{V}_x : x \in D_n, n < k\}$$

是闭包保持集族, 于是 $\{\varphi(x) : x \in U \cap (\bigcup_{n<k} D_n), B(U,\varphi) \in \mathscr{B}'\}$ 是闭包保持的, 因此 $p \notin \overline{\cup\mathscr{B}'}$. 故 $\cup\mathscr{B}'$ 是 X 的闭集.

由 (8.1) 和 (8.2), $\mathscr{B}^\circ$ 是 F 在 X 中闭包保持的开邻域基.

与命题 3.5.2 相似, 有下述定理.

定理 3.5.9[294] X 是 M_1 空间当且仅当 X 是仿紧 σ 空间, 并且 X 的每一闭集在 X 中具有 (σ) 闭包保持的开邻域基.

这一定理充分性的证明类似命题 3.5.2, 必要性的证明相当困难, 是 2004 年 Mizokami[294] 的重要结果. 有兴趣的读者可阅读 Mizokami 的原文.

推论 3.5.10[180] Nagata 空间是遗传 M_1 空间.

至此, Nagata 空间类 $\subset$ 遗传 M_1 空间类 $\subset$ $\mathscr{P}$ 类 $=$ M_1 空间类. 2000 年 Mizokami 和 Shimane[295] 证明了比推论 3.5.10 更有力的结果: M_3 的 k 空间是 M_1 空间. 这些空间类的引入和探讨起因于 Ceder 的 M_1 空间问题. 他们之间的进一步关系以及 Ceder 问题的最终解决将通过映射作为桥梁.

定理 3.5.11[159] (Heath-Junnila 定理) 设 X 是 M_3 空间.

(1) 存在 M_1 空间 Z, 使 X 同胚于 Z 的闭子空间.

(2) 存在 M_1 空间 Y, 使 X 是 Y 的逆紧映象.

证明 取 $Z = X \times \mathbb{S}_1$. 集合 Z 赋予下述拓扑: $X \times (\mathbb{S}_1 - \{0\})$ 的点取为 Z 的孤立点; $X \times \{0\}$ 中点的邻域基取为 $X \times \mathbb{S}_1$ 中相应点在积拓扑下的邻域基. 显然, Z 是正则空间, 并且 X 同胚于 Z 的闭子空间 $X \times \{0\}$. 对 $B \subset X$, 定义

$$B[0] = B \times \{0\};$$
$$B[n] = B \times (\{0\} \cup \{1/k : k \geqslant n\}),\ n \in \mathbb{N}.$$

若 B 是 X 的闭集, 那么 $B[n] = \overline{B[n] - B[0]}$, 于是 $B[n]$ 是 Z 的正则闭集.

(11.1) Z 是 M_1 空间.

由定理 3.5.3, X 具有闭拟基 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 置

$$\mathscr{U}_{nm} = \{B[m] : B \in \mathscr{B}_n\},\ n, m \in \mathbb{N};$$
$$\mathscr{V}_n = \{\{(x, 1/n)\} : x \in X\}.$$

则 $\mathscr{U}_{nm}$ 是 Z 的闭包保持的正则闭集族, $\mathscr{V}_n$ 是 Z 的离散开闭集族, 从而 $(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_{nm}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n)$ 是 Z 的 σ 闭包保持的正则闭拟基. 由命题 1.3.11, Z 是 M_1 空间.

由引理 3.5.7, X 存在稠集 $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, 其中 D_n 是 X 的闭离散子空间且 $D_n \subset D_{n+1}$, 满足对 $B \in \mathscr{B}, B \cap D$ 是 B 的稠集. 定义

$$Y = X[0] \cup (\cup\{D_n \times \{1/n\} : n \in \mathbb{N}\}).$$

(11.2) Y 是 M_1 空间.

先证明: 对 $B \in \mathscr{B}$, $\mathrm{cl}_Y((B[n] - B[0]) \cap Y) = B[n] \cap Y$. 事实上, 显然,

$$\mathrm{cl}_Y((B[n] - B[0]) \cap Y) \subset \overline{B[n] - B[0]} \cap Y = B[n] \cap Y.$$

若 $x \in B$, 设 W 是 x 在 X 的邻域, 对 $k \geqslant n$, 由于 $B \cap D$ 稠于 B, 存在 $m \geqslant k$ 和 $x' \in B \cap W \cap D_m$, 那么 $(x', 1/m) \in W[k] \cap ((B[n] - B[0]) \cap Y)$, 因而

$$B[n]\cap Y\subset \mathrm{cl}_Y((B[n]-B[0])\cap Y).$$

这表明 $B[n]\cap Y$ 是 Y 的正则闭集, 从而 $(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_{nm|Y})\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_{n|Y})$ 是 Y 的 σ 闭包保持的正则闭拟基. 故 Y 是 M_1 空间.

(11.3) X 是 Y 的逆紧映象.

取 $f=\pi_{1|Y}:Y\to X$. 显然, f 是紧映射. 对 Y 的闭集 F, 若 $x\in X-f(F)$, 那么 $(x,0)\notin F$, 于是存在 x 的开邻域 V 和 $m\in\mathbb{N}$, 使 $V[m]\cap F=\varnothing$. 对 $n<m$, 由于 $x\notin f(F\cap(X\times\{1/n\}))\subset D_n$, 所以存在 x 的开邻域 V_n, 使 $V_n\cap f(F\cap(X\times\{1/n\}))=\varnothing$. 令 $U=V\cap(\bigcap_{n<m}V_n)$. 那么 $x\in U\in\tau(X)$ 且 $U\cap f(F)=\varnothing$, 从而 $f(F)\in\tau^c(X)$. 故 f 是闭映射, 因此 f 是逆紧映射.

在 Mizokami 还没有证明定理 3.5.9 之前, Itō[180] 证明了定理 3.5.11 中的空间 Z 和 Y 都属于类 $\mathscr{P}$.

推论 3.5.12[159] 下述条件等价:

(1) M_3 空间类 $=\mathrm{M}_1$ 空间类;

(2) M_1 空间具有闭遗传性质;

(3) M_1 空间关于闭映射封闭;

(4) M_1 空间关于逆紧映射封闭.

由此, Ceder 问题归结为 M_1 空间的映射性质. 下面介绍 M_1 空间的映射定理.

定义 3.5.13 设映射 $f:X\to Y$.

(1) f 称为不可约映射 [101], 若对 X 的真闭子集 F, $f(F)\neq Y$.

(2) f 称为拟开映射, 若对 X 的非空开集 U, $f(U)^\circ\neq\varnothing$.

显然, 开映射是拟开映射.

命题 3.5.14[195] 不可约的伪开映射是拟开映射.

证明 设 $f:X\to Y$ 是不可约的伪开映射. 对 $U\in\tau(X)-\{\varnothing\}$, 由于 f 的不可约性, 存在 $y\in Y-f(X-U)$, 即 $f^{-1}(y)\subset U$, 于是 $y\in f(U)^\circ$, 所以 $f(U)^\circ\neq\varnothing$. 故 f 是拟开映射.

引理 3.5.15[195] 设 $f:X\to Y$ 是拟开的闭映射. 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的闭包保持的开集族, 则 $f(\mathscr{B})^\circ$ 是 Y 的闭包保持集族.

证明 对 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$, 若 $y\in\overline{\cup f(\mathscr{B}')^\circ}$, 那么 $y\in f(\cup\overline{\mathscr{B}'})$, 于是存在 $B\in\mathscr{B}'$, 使 $f^{-1}(y)\cap\overline{B}\neq\varnothing$. 若 $y\in V\in\tau(Y)$, 那么 $f^{-1}(V)\cap B\neq\varnothing$, 于是 $\varnothing\neq f(f^{-1}(V)\cap B)^\circ=V\cap f(B)^\circ$, 所以 $y\in\overline{f(B)^\circ}$. 因此 $f(\mathscr{B})^\circ$ 是 Y 的闭包保持集族.

定理 3.5.16 拟开的闭映射保持 M_1 空间.

证明 设 $f:X\to Y$ 是拟开的闭映射, 其中 X 是 M_1 空间. 由定理 3.5.5, Y 是 M_3 空间. 对 $y\in Y$, 由定理 3.5.9, $f^{-1}(y)$ 在 X 中具有闭包保持的开邻域基 $\mathscr{B}$,

又由引理 3.5.15, $f(\mathscr{B})^\circ$ 是 y 的闭包保持局部基. 再由定理 3.5.8 和 3.5.9, Y 是 M_1 空间.

由命题 3.5.14, 有下述推论, 它回答了一个经典问题 [321, 322].

推论 3.5.17 不可约的闭映射保持 M_1 空间.

命题 3.5.18 若 A 是 M_1 空间 X 的闭子空间, 则 X/A 是 M_1 空间.

证明 让 $q: X \to X/A$ 是自然商映射. 则 q 是闭映射, 于是 X/A 是 M_3 空间. 由定理 3.5.9, X/A 的每一点具有闭包保持的局部基, 从而 X/A 是 M_1 空间.

至此, 3.5.1 中的问题 (2) – (4) 和 (7), (8) 的回答是肯定的, 问题 (1), (5) 和 (6) 是相互等价的. 关于 M_1 空间映射性质的重要成果是下述 Itō[179] 的定理. 限于篇幅, 不在这里叙述他的证明.

定理 3.5.19[179] 闭映射保持遗传 M_1 空间.

推论 3.5.20[353] Lašnev 空间是遗传 M_1 空间.

问题 3.5.21[254] 设 X 是 Fréchet 的层空间. 若 X 具有点可数 k 网, X 是否是 Lašnev 空间?

例 3.5.22 M_i 空间类.

(1) 遗传 M_1 空间 $\nRightarrow$ k 空间, 如 Michael 空间 (例 1.8.8).

(2) Nagata 空间 $\nRightarrow$ Lašnev 空间, 如蝶形空间 (例 1.8.3).

(3) 单调正规空间 $\nRightarrow$ M_3 空间, 如 Sorgenfrey 直线 (例 1.8.9).

3.6 可展空间

由度量化定理的覆盖列形式引出了可展空间, 利用覆盖列可以定义或刻画一大类的广义度量空间, 如 M 空间, wΔ 空间, p 空间, 严格 p 空间等. 在第 2 章已经看到它们对研究度量空间的作用. 本节的目的是给出与可展空间有关的一些广义度量空间的刻画和映射定理. 特别地, 详细论证了江守礼 [185] 定理: 严格 p 空间是次亚紧空间. 这一定理解决了一般拓扑学名家长期未能回答的经典难题.

定理 3.6.1[185] (江守礼定理) 具有严格 p 序列的空间是次亚紧空间.

证明 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是空间 X 的严格 p 序列, 其中 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 再设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ 是 X 的良序开覆盖, 其中当 $\alpha < \beta < \gamma$ 时, $U_\alpha \subset U_\beta$. 对 $x \in X$, 定义

$$\begin{aligned}
&C_x = \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n),\\
&\alpha(x) = \min\{\alpha < \gamma : x \in U_\alpha\},\\
&\beta(x) = \min\{\beta < \gamma : C_x \subset U_\beta\},\\
&n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U_{\beta(x)}\}.
\end{aligned}$$

对 $n \in \mathbb{N}$, 取定 $\mathscr{U}_{nx} \in (\mathscr{U}_n)_x^{<\omega}$, 使 $C_x \subset \cup\mathscr{U}_{nx}$. 记

$$U_{nx} = (\cap \mathscr{U}_{nx}) \cap U_{\alpha(x)}.$$

现在, 关于 $m \in \mathbb{N}$, 归纳构造 X 的开覆盖的可数族 $\mathscr{R}_m$, 使 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{R}_m$ 是 $\mathscr{U}$ 的 θ 开加细序列. 为简洁起见, 约定:

(i) 若 f 是从 $\mathbb{N}$ 的子集到 $\mathbb{N}$ 内的函数, 对 $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $f_{|n} = f_{|\{1,2,\cdots,n-1\}}$.

(ii) 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的子集族, 对 $n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}^n = \{\mathscr{P}' \subset \mathscr{P} : |\mathscr{P}'| = n\}$.

令 $\mathscr{R}_1 = \{\mathscr{U}\}$. 假设对固定的 $m \in \mathbb{N}, \mathscr{R}_m$ 是 X 的开覆盖的可数族. 对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned} &F_1 = \varnothing; \\ &F_n = \{f : f \text{ 是 } \{1, 2, \cdots, n-1\} \text{ 到 } \mathbb{N} \text{ 内的函数 }\}, n > 1; \\ &F = \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n. \end{aligned}$$

取定 $\mathscr{H} \in \mathscr{R}_m$. 下面对 $f \in F$, 归纳定义 X 的开集族 $\mathscr{U}(\mathscr{H}, f)$.

首先, 置 $\mathscr{U}(\mathscr{H}, \varnothing) = \varnothing$. 设 $f \in F_{n+1}$, 并且已定义了 X 的开集族 $\mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})$. 对 $\mathscr{V} \in \mathscr{H}^{n+1}$, 置

$$\begin{aligned} &U(\mathscr{V}, f) = \cup\{U_{f(n)y} : \mathscr{V} = (\mathscr{H})_y, y \notin \cup \mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})\}, \\ &\mathscr{U}(\mathscr{H}, f) = \mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n}) \cup \{U(\mathscr{V}, f) : \mathscr{V} \in \mathscr{H}^{n+1}\}. \end{aligned}$$

再置

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}_m = \{A \subset \mathscr{R}_m \times F : |A| < \aleph_0\}, \\ &\mathscr{B}_m = \mathscr{A}_m \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \end{aligned}$$

对 $A \in \mathscr{A}_m$, 令 $\mathscr{H}(A) = \cup\{\mathscr{U}(\mathscr{H}, f) : (\mathscr{H}, f) \in A\}$. 对 $B \in \mathscr{B}_m$, 记 $B = (A, i, j)$, 令

$$\mathscr{H}(B) = \{H(B, \beta)\}_{\beta<\gamma},$$

其中

$$H(B, \beta) = \cup\{U_{jy} : y \notin \cup\mathscr{H}(A), n(y) \leqslant i, \beta(y) = \beta\}.$$

对 $\mathscr{E} \in (\mathscr{A}_m \cup \mathscr{B}_m)^{<\omega}, k \in \mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned} &\mathscr{H}(\mathscr{E}) = \cup\{\mathscr{H}(E) : E \in \mathscr{E}\}, \\ &\mathscr{H}_k(\mathscr{E}) = \mathscr{H}(\mathscr{E}) \cup \{U_\alpha \cap U : \alpha < \gamma, U \in \mathscr{U}_k \text{ 且 } U \not\subset \cup\mathscr{H}(\mathscr{E})\}. \end{aligned}$$

然后, 定义

$$\mathscr{R}_{m+1} = \mathscr{R}_m \cup \{\mathscr{H}_k(\mathscr{E}) : k \in \mathbb{N}, \mathscr{E} \in (\mathscr{A}_m \cup \mathscr{B}_m)^{<\omega}\}.$$

则

(1.1) 可数族 $\mathscr{R}_{m+1}$ 的每一元是 $\mathscr{U}$ 的开加细.

由 $\mathscr{H}_k(\mathscr{E})$ 的定义, $\mathscr{R}_{m+1}$ 的每一元是 X 的开覆盖. 对 $\mathscr{H} \in \mathscr{R}_m$, 设 $n \in \mathbb{N}, f \in F_{n+1}$ 且 $\mathscr{V} \in \mathscr{H}^{n+1}$. 则存在 $\alpha < \gamma$, 使 $\cap\mathscr{V} \subset U_\alpha$, 于是 $U(\mathscr{V}, f) \subset U_\alpha$. 对 $B \in \mathscr{B}_m, \beta < \gamma$, 有 $H(B, \beta) \subset U_\beta$. 因而 $\mathscr{H}_k(\mathscr{E})$ 加细 $\mathscr{U}$.

令 $\mathscr{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{R}_m$.

(1.2) 对 $x \in X, \mathscr{H} \in \mathscr{R}$, 存在函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足对 $n \in \mathbb{N}$, x 仅属于 $\mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})$ 中有限个元.

用归纳法定义 f. 取 $f_{|1} = \varnothing$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 若已定义了 $f_{|n}$ 满足要求. 对 $i \in \mathbb{N}$, 取 $f_i \in F_{n+1}$, 使 $f_{i|n} = f_{|n}$ 且 $f_i(n) = i$. 如果存在 $\mathscr{H}^{n+1}$ 的由互不相同元组成的子集 $\{\mathscr{V}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 使 $x \in U(\mathscr{V}_i, f_i)$, 由 Δ 系引理 [209], 存在 $\mathbb{N}$ 的无限集 J 及 $\Delta \subset \mathscr{H}$, 使对 $i \neq j \in J$, 有 $\mathscr{V}_i \bigcap \mathscr{V}_j = \Delta$. 对 $i \in J$, 存在 $x_i \notin \cup\mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})$, 满足$\mathscr{V}_i = (\mathscr{H})_{x_i}$ 且 $x_i \in U_{ix_i}$. 于是 $x_i \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_i)$, 从而序列 $\{x_i\}$ 有聚点 $p \in X$, 那么 $p \in C_x$. 令 $\mathscr{V} = (\mathscr{H})_p$. 若 $|\mathscr{V}| \geqslant n+2$, 让 $\mathscr{V}'$ 是 $\mathscr{V}$ 的含 $n+2$ 个元的子集, 那么有 $i \in J$, 使 $x_i \in \cap\mathscr{V}'$, 从而 $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}_i$, 矛盾. 因此, $|\mathscr{V}| \leqslant n+1$. 取 $i \neq j \in J$, 满足 $x_i, x_j \in \cap\mathscr{V}$. 则 $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}_i \cap \mathscr{V}_j$, 于是 $|\mathscr{V}| \leqslant n$, 因而 $p \in \cup\mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})$, 故有 $k \in J$, 使 $x_k \in \cup\mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})$, 矛盾.

对 $x \in X, i \in \mathbb{N}$, 定义

$$S_x = \{y \in X : \alpha(x) \leqslant \alpha(y) \leqslant \beta(y) < \beta(x)\},$$
$$X_i = \{y \in X : n(y) \leqslant i\}.$$

则

(1.3) $\overline{S_x \cap X_i} \subset S_x$.

设 $z \in \overline{S_x \cap X_i}$. 那么对 $y \in S_x$, 有 $\alpha(y) \geqslant \alpha(x)$, 因此 $\alpha(z) \geqslant \alpha(x)$. 如果 $\beta(z) \geqslant \beta(x)$, 取 $y \in U_{iz} \cap S_x \cap X_i$, 那么 $\beta(y) < \beta(x)$ 且 $n(y) \leqslant i$, 从而 $\mathrm{st}(y, \mathscr{U}_i) \subset U_{\beta(x)}$. 由 C_z 的紧性, 选取 $p \in C_z$, 使 $\alpha(p) = \beta(z)$. 取定 $U \in \mathscr{U}_{iz}$, 则 $p \in U \subset \mathrm{st}(y, \mathscr{U}_i) \subset U_{\beta(y)}$, 因而 $\alpha(p) \leqslant \beta(y) < \beta(x) \leqslant \beta(z) = \alpha(p)$, 矛盾. 故 $\beta(z) < \beta(x)$, 所以 $z \in S_x$.

下面转入证明 $\mathscr{R}$ 是 X 的 θ 序列. 若不然, 定义

$$Y = \{y \in X :\ 存在\ \mathscr{H} \in \mathscr{R}\ 使\ |(\mathscr{H})_y| < \aleph_0\}.$$

则 $X - Y \neq \varnothing$, 于是存在 $x \in X - Y$, 使 $\beta(x) = \min\{\beta(z) : z \in X - Y\}$. 由此, 对 $y \in S_x$, 必存在 $n \in \mathbb{N}, \mathscr{H} \in \mathscr{R}$, 使 $|(\mathscr{H})_y| = n$. 对这个 x 及 $\mathscr{H}$, 存在满足 (1.2) 的函数 f. 这时 $y \in \cup\mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})$, 且 x 仅属于 $\mathscr{U}(\mathscr{H}, f_{|n})$ 中有限个元. 对 $i \in \mathbb{N}, X$ 的紧集 $C_x \cap \overline{S_x \cap X_i} \subset S_x$, 由上所述, 存在 $m_i, h_i \in \mathbb{N}$ 以及 $\{\mathscr{H}_k : k \leqslant h_i\} \subset \mathscr{R}_{m_i}, \{f_k : k \leqslant h_i\} \subset F$, 使 $\bigcup_{k\leqslant h_i} \mathscr{U}(\mathscr{H}_k, f_k)$ 覆盖 $C_x \cap \overline{S_x \cap X_i}$ 且仅有限个元含 x. 令 $A_i = \{(\mathscr{H}_k, f_k) : k \leqslant h_i\}$. 那么

(1.4) 存在 $j_i \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{H}(B_i)$ 中仅有限个元含 x, 其中 $B_i = (A_i, i, j_i)$.

否则, 对 $j \in \mathbb{N}$, 存在 $\beta_j < \gamma, x_j \notin \cup\mathscr{H}(A_i)$, 满足 $\beta_j < \beta_{j+1}, \beta(x_j) = \beta_j, x \in U_{jx_j}$ 且 $n(x_j) \leqslant i$. 从而 $x_j \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_j)$, 因此 $\{x_j\}$ 在 C_x 中有聚点 z. 一方面, $x \in U_{jx_j} \subset U_{\alpha(x_j)}$, 所以 $\alpha(x_j) \geqslant \alpha(x)$. 另一方面, 如果 $\beta(x_j) \geqslant \beta(x)$, 选取

$m > j+n(x)$, 那么 $\beta(x_m) > \beta(x_j) \geqslant \beta(x)$, 于是存在 $U \in \mathscr{U}_{mx_m}$, 使 $U \not\subset U_{\beta(x)}$. 然而 $n(x) < m$ 且 $x \in U \in \mathscr{U}_m$, 因此 $U \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \subset U_{\beta(x)}$, 矛盾. 故 $\beta(x_j) < \beta(x)$. 由此, $x_j \in S_x \cap X_i$. 从而 $z \in C_x \cap \overline{S_x \cap X_i} \subset \cup \mathscr{H}(A_i)$, 所以存在 $k \in \mathbb{N}$, 使 $x_k \in \cup \mathscr{H}(A_i)$, 矛盾.

注意到, 若 $y \in C_x$ 且 $i > n(y)$, 则 $y \in \cup(\mathscr{H}(A_i) \cup \mathscr{H}(B_i))$. 由 C_x 的紧性, 存在 $I \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 使 $\bigcup_{i \in I}(\mathscr{H}(A_i) \cup \mathscr{H}(B_i))$ 覆盖 C_x 且仅有限个元含 x. 令

$$m = \max\{m_i : i \in I\},$$
$$\mathscr{E} = \{A_i : i \in I\} \cup \{B_i : i \in I\}.$$

则 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 覆盖 C_x 且仅有限个元含 x. 取 $k \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_k) \subset \cup \mathscr{H}(\mathscr{E})$. 则 $\mathscr{H}_k(\mathscr{E}) \in \mathscr{R}_{m+1}$ 且 $|(\mathscr{H}_k(\mathscr{E}))_x| < \aleph_0$, 矛盾. 故 $\mathscr{R}$ 是 X 的 θ 序列.

综上所述, X 的任一良序开覆盖存在 θ 开加细序列, 故 X 是次亚紧空间 (见附录 A 定理 4.8).

利用上述定理的证明技巧, Kemoto 和 Yajima[201] 证明了 β 空间是次亚紧空间当且仅当它的任一良序开覆盖有 σ 闭包保持的闭加细; 同时构造例子说明存在非次亚紧的正规 ortho 紧空间, 使其任一良序开覆盖有闭包保持的闭加细. 这里涉及在覆盖性质理论研究中的 Junnila-Katuta 问题 [189, 199].

推论 3.6.2　下述条件等价:

(1) X 是可展空间;

(2) X 是具有严格 p 序列和点可数 p-k 网的空间 [376];

(3) X 是具有严格 p 序列和 G_δ 对角线的空间 [207].

证明　由推论 3.1.4 得 (1) ⇒ (2). 由定理 3.1.8 的 (8.1) 和定理 3.6.1 得 (2) ⇒ (3). 再由定理 3.6.1, 命题 1.5.18 和定理 1.7.7 得 (3) ⇒ (1).

推论 3.6.3　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 具有严格 p 序列;

(2) X 是强 $\Sigma^\sharp$ 的 wΔ 空间 [189];

(3) X 是次亚紧的 wΔ 空间;

(4) X 是具有 p 序列的次亚紧空间.

证明　由定理 3.2.6 和 2.2.18, 只须证 (1) ⇒ (2). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的严格 p 序列. 对 $n \in \mathbb{N}$, 由 X 的次亚紧性, X 存在 σ 闭包保持的闭覆盖 $\mathscr{F}_n$, 使对 $x \in X$, 有 $F \in \mathscr{F}_n$ 满足 $x \in F \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ (见附录 A 定理 4.8). 令

$$\mathscr{F} = \{\cap \mathscr{F}' : \mathscr{F}' \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n)^{<\omega}\}.$$

则 $\mathscr{F}$ 是 X 的 σ 闭包保持闭集族. 对 $x \in X$, 置

$$K_x = \cap(\mathscr{F})_x,$$

$$C_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n).$$

那么 $x \in K_x \subset C_x$, 于是 $K_x \in \mathscr{K}(X)$. 若 $K_x \subset U \in \tau$, 那么 $\{U\} \cup \{X - F : F \in (\mathscr{F})_x\}$ 是 X 的开覆盖, 于是存在 $\mathscr{F}' \in (\mathscr{F})_x^{<\omega}$, 使 $C_x \subset U \cup (X - \cap\mathscr{F}')$, 从而存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U \cup (X - \cap\mathscr{F}')$. 取 $F \in \mathscr{F}_n$, 使 $x \in F \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$. 令 $\mathscr{F}'' = \mathscr{F}' \cup \{F\}$. 那么 $\cap\mathscr{F}'' \in \mathscr{F}$ 且 $K_x \subset \cap\mathscr{F}'' \subset U$. 因此 $\mathscr{F}$ 是 X 的关于 $\{K_x : x \in X\}$ 的 $(\mathrm{mod}k)$ 网. 故 X 是强 $\Sigma^\sharp$ 空间.

对网已在 1.5 节用于刻画半层空间, 下面用对网进一步描述可展空间. 为了便于使用对网的概念, 约定: 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的集对族, 对 $P \in \mathscr{P}, P', P''$ 分别表示序对 P 的第一个分量和第二个分量. 记

$$\mathscr{P}' = \{P' : P \in \mathscr{P}\};$$
$$\mathscr{P}'' = \{P'' : P \in \mathscr{P}\};$$
$$\mathrm{st}(x, \mathscr{P}) = \cup\{P'' : P \in \mathscr{P}, x \in P'\}, x \in X;$$
$$\mathrm{st}(A, \mathscr{P}) = \cup\{P'' : P \in \mathscr{P}, A \cap P' \neq \varnothing\}, A \subset X.$$

对 $\mathscr{P}$ 的子集 $\mathscr{R}_1, \cdots, \mathscr{R}_n$, 记

$$\mathscr{R}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{R}_n = \{(\bigcap_{i\leqslant n} P_i', \bigcap_{i\leqslant n} P_i'') : P_i \in \mathscr{R}_i, i \leqslant n\}.$$

定理 3.6.4[70] 下述条件等价:

(1) X 是可展空间

(2) X 存在对网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 满足

(i) $\mathscr{P}_n'$ 是 X 的局部有限闭集族, $\mathscr{P}_n''$ 是 X 的开集族;

(ii) 若 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $K \subset \mathrm{st}(K, \mathscr{P}_m) \subset U$.

(3) X 存在对网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 满足

(i) $\mathscr{P}_n'$ 是 X 的局部有限闭集族;

(ii) 若 $x \in U \in \tau$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $x \in \mathrm{st}(x, \mathscr{P}_m)^\circ \subset U$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是空间 X 的展开, 并且 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 记 $\mathscr{U}_n = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 由 X 的次仿紧性, $\mathscr{U}_n$ 存在闭加细 $\mathscr{F}_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{nk}$, 其中 $\mathscr{F}_{nk} = \{F_{\alpha k}\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ 是 X 的离散集族且 $F_{\alpha k} \subset U_\alpha$. 令

$$\mathscr{P}_{nk} = \{(F_{\alpha k}, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda_n}.$$

那么 $\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_{nk}$ 是 X 的对网. 对 $\mathbb{N}$ 的有限序列 $\{k_1, \cdots, k_n\}$, 定义

$$\mathscr{H}(k_1, \cdots, k_n) = \wedge\{\mathscr{P}_{ik_i} : i \leqslant n\}.$$

对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 若 $x \in K$, 取 $\mathbb{N}$ 的序列 $\{k_i\}$, 使 $x \in \cup\mathscr{F}_{ik_i}$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$A_n = \cup\{H' : H \in \mathscr{H}(k_1, \cdots, k_n), H' \cap K \neq \varnothing, H'' \not\subset U\}.$$

则 $\{A_n\}$ 是 X 的递减的闭集列, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $A_m = \varnothing$. 否则, 存在 $y \in K \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ 以及 $j \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(y, \mathscr{U}_j) \subset U$, 从而

$$\mathrm{st}(y,\mathscr{H}(k_1,\cdots,k_j))\subset \mathrm{st}(y,\mathscr{U}_j)\subset U.$$

这与 A_j 的定义矛盾. 因此 $x\in \mathrm{st}(K,\mathscr{H}(k_1,\cdots,k_m))\subset U$. 由 K 的紧性, $\cup\{\mathscr{H}(k_1,\cdots,k_n):k_i\in\mathbb{N},i\leqslant n\in\mathbb{N}\}$ 满足 (2) 的要求.

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 的对网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 满足 (3) 的要求. 对 $n,k\in\mathbb{N}$, 令

$$\phi_{nk}=\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}'_n:|\mathscr{F}|=k\}.$$

对 $\mathscr{F}\in\phi_{nk}$, 令

$$U(\mathscr{F})=\mathrm{int}(\cup\{P'':P\in\mathscr{P}_n,P'\in\mathscr{F}\})-\cup(\mathscr{P}'_n-\mathscr{F}),$$
$$\mathscr{U}_{nk}=\{U(\mathscr{F}):\mathscr{F}\in\phi_{nk}\}.$$

则 $\{\mathscr{U}_{nk}\}$ 是 X 的拟展开. 事实上, 对 $x\in U\in\tau$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $x\in \mathrm{st}(x,\mathscr{P}_m)^\circ\subset U$. 置

$$\mathscr{F}=\{P':P\in\mathscr{P}_m,x\in P'\},k=|\mathscr{F}|.$$

那么 $\mathscr{F}\in\phi_{mk}$, 于是 $x\in U(\mathscr{F})\subset \mathrm{st}(x,\mathscr{P}_m)^\circ\subset U$. 如果 $\mathscr{E}\in\phi_{mk}-\{\mathscr{F}\}$, 则 $x\in\cup(\mathscr{P}'_m-\mathscr{E})$, 从而 $x\notin U(\mathscr{E})$. 这说明 $U(\mathscr{F})$ 是 $\mathscr{U}_{mk}$ 中唯一含 x 的元, 因此 $x\in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{mk})\subset U$. 故 X 是拟可展空间. 而 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}'_n$ 是 X 的 σ 局部有限闭网, 所以 X 是 perfect 空间. 由定理 1.2.10, X 是可展空间.

推论 3.6.5[246] X 是可展空间当且仅当 X 存在对网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 满足

(i) $\mathscr{P}'_n$ 是 X 的遗传闭包保持闭集族;

(ii) 若 $x\in U\in\tau$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $x\in \mathrm{st}(x,\mathscr{P}_m)^\circ\subset U$.

证明 只须证充分性. 设 X 的对网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 满足条件 (i) 和 (ii). 由 (ii), X 是第一可数空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{R}_n=\{(\overline{P'-D_n},P''):P\in\mathscr{P}_n\}\cup\{(\{x\},\mathrm{st}(x,\mathscr{P}_n)):x\in D_n\},$$

其中 $D_n=\{x\in X:|(\mathscr{P}'_n)_x|\geqslant\aleph_0\}$. 由引理 3.2.16, $\mathscr{R}'_n$ 是 X 的局部有限闭集族, 并且对 $x\in X,\mathrm{st}(x,\mathscr{R}_n)=\mathrm{st}(x,\mathscr{P}_n)$, 于是 X 的对网 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{R}_n$ 满足定理 3.6.4(3), 故 X 是可展空间.

问题 3.6.6[293] 用 σ 遗传闭包保持的对网刻画可展空间的闭映象.

下面讨论在 §2.10 中介绍的亚紧可展空间更深入的性质. 若定义 3.3.3 的满足 (G) 和一致 (G) 的族 $\mathscr{W}$ 是 X 的开集族, 则 $\mathscr{W}$ 分别称为开 (G) 和开一致 (G).

定理 3.6.7[297] 亚 Lindelöf 的可展空间等价于满足开 (G) 的半层空间.

证明 设 X 是亚 Lindelöf 的可展空间. 存在 X 的点可数展开 $\{\mathscr{V}_n\}$, 使 $\mathscr{V}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{V}_n$. 令

$$\mathscr{W}_x=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathscr{V}_n)_x,x\in X;$$

$$\mathscr{W} = \{\mathscr{W}_x : x \in X\}.$$

则 $\mathscr{W}$ 满足开 (G). 事实上, 设 $x \in U \in \tau$. 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{V}_n) \subset U$. 取定 $V \in (\mathscr{V}_n)_x$. 若 $y \in V$, 则 $V \in \mathscr{W}_y$ 且 $x \in V \subset U$.

反之, 设 $\mathscr{W} = \{\mathscr{W}_x : x \in X\}$ 是半层空间 X 的开 (G), 其中 $\mathscr{W}_x = \{W(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由引理 3.3.4, X 是亚 Lindelöf 空间. 让 g 是 X 的半层函数. 对 $n \in \mathbb{N}$, X 的开覆盖 $\{g(n,x) : x \in X\}$ 存在点可数的开加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $U \in \mathscr{U}_n$, 存在 $x_U \in X$, 使 $U \subset g(n, x_U)$. 置

$$\mathscr{B}_{nm} = \{U \cap W(m, x_U) : U \in \mathscr{U}_n\}, m \in \mathbb{N};$$
$$\mathscr{B} = \bigcup\nolimits_{n,m\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_{nm}.$$

则 $\mathscr{B}$ 是 X 的点可数开集族. 对 $x \in O \in \tau$, 取定 $U_n \in (\mathscr{U}_n)_x$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), 记 $x_n = x_{U_n}$. 则 $x \in g(n, x_n)$, 于是序列 $x_n \to x$, 所以存在 $i, m \in \mathbb{N}$, 使 $x_i \in V(x, O), x \in W(m, x_i)$, 从而 $x \in U_i \cap W(m, x_i) \subset O$. 故 $\mathscr{B}$ 是 X 的点可数基. 由推论 1.4.5 和定理 1.2.11, X 是可展空间.

问题 3.6.8[91] 满足开 (G) 的空间是否具有点可数基?

与开一致 (G) 相关的是一致基的概念.

定义 3.6.9[2] 空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 称为一致的, 若 $x \in X$, 如果 $\mathscr{B}'$ 是 $(\mathscr{B})_x$ 的可数无限子集, 则 $\mathscr{B}'$ 是 x 在 X 中的局部基.

定理 3.6.10 下述条件等价:

(1) X 是亚紧可展空间;

(2) X 具有一致基 [151];

(3) X 满足开一致 (G)[297].

证明 (1) ⇒ (2). 设 X 是亚紧可展空间. 存在 X 的点有限展开 $\{\mathscr{B}_n\}$, 使 $\mathscr{B}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{B}_n$. 令 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$. 则 $\mathscr{B}$ 是 X 的基. 若 $x \in U \in \tau$ 且 $\mathscr{B}'$ 是 $(\mathscr{B})_x$ 的可数无限集, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{B}_m) \subset U$. 由点有限性, 存在 $n > m$ 和 $B \in \mathscr{B}' \wedge \mathscr{B}_n$, 则 $B \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{B}_m) \subset O$. 故 X 具有一致基.

(2) ⇒ (3). 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一致基. 若 $\mathscr{B}$ 是点可数的, 易验证, $\mathscr{W} = \{(\mathscr{B})_x : x \in X\}$ 是 X 的开一致 (G). 若存在某 $(\mathscr{B})_x$ 是不可数的, 如果 $z \in X - \{x\}$, 则 $\{B \in (\mathscr{B})_x : z \in B\}$ 是有限集, 所以存在 $(\mathscr{B})_x$ 的无限集 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in B_n - \{x\}$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 使 x_n 恰属于 $(\mathscr{B})_x$ 的 k 个元. 则 $x_n \to x$. 因为 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 存在 $(\mathscr{B})_x$ 的子列 $\{B'_i\}$ 和 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$, 使当 $i \in \mathbb{N}$ 时, $\{x_{n_j} : j \geqslant i\} \subset B'_i \subset X - \{x_{n_j} : j < i\}$, 则 x_{n_i} 至少属于 $(\mathscr{B})_x$ 的 i 个元, 矛盾.

(3) ⇒ (1). 由引理 3.3.6, 定理 3.6.7 和引理 3.3.4, 满足开一致 (G) 的空间是亚紧可展空间.

推论 3.6.11 具有一致基性质是可加性, 遗传性和可数可积性.

本节第二部分, 讨论 wΔ 空间, 可展空间以及一致基空间的映射性质.

定理 3.6.12[397] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是可展空间 (具有一致基). 若下述条件之一成立, 则 Y 是可展空间 (具有一致基).

(1) f 是紧映射.

(2) X 是正则空间, Y 是第一可数空间.

证明 (1) f 是逆紧映射. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的满足定理 3.6.4(2) 的对网. 对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{R}_n = \{(f(P'), f(P'')) : P \in \mathscr{P}_n\}.$$

那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{R}_n$ 是 Y 的满足定理 3.6.4(3) 的对网, 因而 Y 是可展空间.

(2) 由定理 3.3.12, 存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z, 使当 $y \in Y - Z$ 时, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集. 记 $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, 其中 Z_n 是 Y 的闭离散子空间. 对 $y \in Z$, 设 y 在 Y 的可数局部基为 $\{U(y,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 让 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的满足定理 3.6.4(2) 的对网. 对 $n, j \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{R}_n = \{(f(P'), f(P'')) : P \in \mathscr{P}_n\}, \mathscr{H}_{nj} = \{(\{y\}, U(y,j)) : y \in Z_n\}.$$

那么 $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{R}_n) \cup (\bigcup_{n,j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_{nj})$ 是 Y 的满足推论 3.6.5(i) 的对网. 设 $y \in U \in \tau(Y)$. 如果 $y \in Z$, 那么存在 $n, j \in \mathbb{N}$, 使 $y \in Z_n$ 且 $U(y,j) \subset U$, 于是 $y \in \mathrm{st}(y, \mathscr{H}_{nj})^\circ \subset U(y,j) \subset U$. 如果 $y \in Y - Z$, 那么 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $f^{-1}(y) \subset \mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{P}_m) \subset f^{-1}(U)$, 从而 $y \in \mathrm{st}(y, \mathscr{R}_m)^\circ \subset \mathrm{st}(y, \mathscr{R}_m) \subset U$. 因此 $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{R}_n) \cup (\bigcup_{n,j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_{nj})$ 满足推论 3.6.5(ii). 故 Y 是可展空间.

由定理 3.6.10, 对一致基的情形, 结论仍然正确.

问题 3.6.13[71] 逆紧映射是否保持 wΔ 空间?

命题 3.6.14[71] wΔ 空间的逆可数紧逆象是 wΔ 空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是逆可数紧映射, 其中 Y 是 wΔ 空间. 让 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 Y 的 wΔ 序列. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \in \mathrm{st}(x, f^{-1}(\mathscr{U}_n))$, 那么 $f(x_n) \in \mathrm{st}(f(x), \mathscr{U}_n)$, 于是序列 $\{f(x_n)\}$ 有聚点. 因为 f 是逆可数紧映射, 所以 $\{x_n\}$ 有聚点. 故 $\{f^{-1}(\mathscr{U}_n)\}$ 是 X 的 wΔ 序列, 因此 X 是 wΔ 空间.

由命题 3.6.14, 3.3.16, 定理 1.7.7 和 3.6.10 得下述推论.

推论 3.6.15[36, 267] 设 $f: X \to Y$ 是逆紧映射, 其中 X 具有 G_δ 对角线. 若 Y 是可展空间 (具有一致基), 则 X 是可展空间 (具有一致基).

尽管 Moore 空间满足紧型分解定理, 但对严格 p 空间, 它是否满足紧型分解定理还是一个尚未解决的问题.

问题 3.6.16[84] Moore 空间的逆紧逆象是否满足紧型分解定理?

例 3.6.17 可展空间类.

(1) 严格 p 性质 $\not\Rightarrow$ 次仿紧性, 如例 1.8.10 中的空间 X.

(2) 局部紧, 拟可展性 $\not\Rightarrow$ β 空间性质, 如例 1.8.4(6) 中的空间 $\psi(D)$.

(3) Burke[68] 构造例子: 局部紧, 具有 G_δ 对角线 $\not\Rightarrow$ wΔ空间.

(4) Alster, Burke 和 Davis[11] 在 CH 下构造例子: 局部紧, 具有 G_δ 对角线, wΔ 空间 $\not\Rightarrow$ 严格 p 空间.

(5) Good, Knight 和 Mohamad[138]构造例子: 完全正则, 伪紧, 具有 sharp 基 $\not\Rightarrow$ G_δ^* 对角线, 其中空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 称为 sharp, 如果对 $x\in X$ 及 $(\mathscr{B})_x$ 的互不相同元组成的序列 $\{B_n\},\{\bigcap_{i\leqslant n}B_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的局部基. 一致基 $\Rightarrow$ sharp 基 $\Rightarrow$ 具 G_δ 对角线和点可数基.

例 3.6.18 可展空间类与映射.

(1) 存在局部紧, 可展空间 X 和闭映射 $f:X\to Y$, 使 Y 是第一可数空间, 但 f 不是边缘紧映射.

对例 2.6.6 定义的闭映射 $f:\psi(\mathbb{N})\to\mathbb{S}_1$. $\partial f^{-1}(0)=\psi(\mathbb{N})-\mathbb{N}$ 不是 $\psi(\mathbb{N})$ 的紧集. 这说明定理 3.6.12(2) 不可像度量空间的情形通过边缘紧映射得到.

(2) 逆紧映射不保持可展空间的逆紧逆象 [83]: 存在局部紧, 可展空间 S 以及逆紧映射 $g:X\to S$ 和 $f:X\to Y$, 使 Y 不是任何具有点 G_δ 性质 (因而可展空间) 的逆紧逆象.

取 S 是 Isbell-Mrówka 空间 $\psi(\mathbb{N})$ (例 1.8.4). 这时 $\mathbb{N}$ 是 S 的稠集, $\mathscr{A}$ 是 S 的不可数离散集. 取 $\mathscr{A}$ 的基数为 $\aleph_1$ 的子空间, 记为 ω_1. 让 $Z=\omega_1\cup\{z\}$ 是离散空间 ω_1 的一点紧化. 取 $X=S\times Z$. 令 $g=\pi_1:X\to S$. 那么 g 是逆紧映射. 对 $\alpha\in\omega_1$, 将 X 的每两点 (α,α) 与 $(\alpha+1,z)$ 贴成一点, 得到的商空间记为 Y. 再让 $f:X\to Y$ 是自然商映射. 则 f 是逆紧映射.

假设存在逆紧映射 $h:Y\to T$, 其中 T 具有点 G_δ 性质. 对 $n\in\mathbb{N}$, 记 $f_n=h\circ f_{|\{n\}\times Z}:\{n\}\times Z\to h(\{n\}\times Z),t(n,z)=h(n,z)$. 由于 $\{t(n,z)\}$ 是 T 的 G_δ 集, 于是 $\{n\}\times Z-f_n^{-1}(t(n,z))$ 是可数集, 从而存在 $\beta_n\in\omega_1$, 使当 $\beta_n\leqslant\alpha<\omega_1$ 时, $f_n(n,\alpha)=t(n,z)$. 因此, 存在 $\beta\in\omega_1$, 使当 $\beta\leqslant\alpha<\omega_1,n\in\mathbb{N}$ 时, $f_n(n,\alpha)=t(n,z)$, 即 $h(n,\alpha)=h(n,z)$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 令 $y_k=f(\beta+k,z)$. 对 $\alpha=\beta+k$, 存在 $\mathbb{N}$ 的序列 $\{n_i\}$, 使 $n_i\to\alpha$, 那么在 X 中 $(n_i,\alpha)\to(\alpha,\alpha)$, 从而在 T 中 $h(n_i,\alpha)\to hf(\alpha,\alpha)=hf(\alpha+1,z)=y_{k+1}$. 另一方面, $h(n_i,\alpha)=h(n_i,z)$, 所以 $h(n_i,\alpha)\to hf(\alpha,z)=y_k$, 因而 $h^{-1}h(y_1)$ 含无限闭离散集 $\{y_k:k\in\mathbb{N}\}$, 这与 h 的逆紧性相矛盾. 故 Y 不是任何具有点 G_δ 性质的逆紧逆象.

(3) 存在拟可展的 p 空间 X 不满足紧型分解定理 [82].

设 Y 是 Isbell-Mrówka 空间 $\psi(D)$, 其中 $|D|\geqslant\aleph_1$ (例 1.8.4). 取 $X=Y\times\mathbb{S}_1-(D\times\{0\})$. 让 $f=\pi_{1|X}:X\to Y$. 则 f 是闭映射. 对 $y\in D,f^{-1}(y)$ 不是 X 的紧

集, 并且 D 不是 Y 的 σ 闭离散子空间 (Y 的含于 D 内的闭集是有限集), 故 X 不满足紧型分解定理.

因为 Y 与 $\mathbb{S}_1$ 都是拟可展空间, 所以 X 是拟可展. 采用例 1.8.4 的记号, 对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{U}_n = \{\{A_\alpha\} \cup \{x(\alpha, m) : m \geqslant n\} : \alpha \in \Lambda\} \cup \{\{x\} : x \in E_n\},$$

其中

$$E_n = D - \{x(\alpha, m) : \alpha \in \Lambda, m \geqslant n\}.$$

则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 Y 的 p 序列. 再令

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_n = \{X \cap (U \times (\{0\} \cup \{1/m : m \geqslant n\})) : U \in \mathscr{U}_n\} \\ \cup (\textstyle\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{U \times \{1/m\} : U \in \mathscr{U}_n\}).\end{aligned}$$

则 $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 X 的 p 序列. 故 X 是 p 空间

(4) 逆紧映射不保持 p 空间性质 [82].

继续 (3) 中的构造. 对 $z \in Y - D$, 将 X 的子集 $\{z\} \times \mathbb{S}_1$ 贴成一点形成的商空间记为 H. 让 $f : X \to H$ 是自然商映射. 则 f 是逆紧映射. 若 H 是 p 空间, 设 $\{\mathscr{W}_n\}$ 是 H 的 p 序列. 对 $z \in Y - D, n \in \mathbb{N}$, 存在 $U(n, z) \in \tau(Y)$ 和 $W(n, z) \in \mathscr{W}_n$, 使 $\{z\} \times \mathbb{S}_1 \subset X \cap (U(n, z) \times \mathbb{S}_1) \subset f^{-1}(W(n, z))$. 因为 $Y - D$ 不是 Y 的 G_δ 集, 于是存在 $d \in D \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup_{z \in Y - D} U(n, z)))$, 从而存在 $Y - D$ 的序列 $\{z_n\}$, 使 $d \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U(n, z_n)$. 因此 $\{d\} \times (\mathbb{S}_1 - \{0\}) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W(n, z_n)$, 所以 $\{d\} \times (\mathbb{S}_1 - \{0\})$ 是 H 的紧集, 矛盾. 故 H 不是 p 空间.

有限到一的伪开映射未必保持可展空间 [382]. 下述问题尚未解决.

问题 3.6.19[382] Moore 空间的有限到一的伪开映象是否是可展空间?

3.7 M 空 间

本节从两条途径讨论 M 空间或仿紧 M 空间的性质. 其一, 作为度量空间的逆紧逆象的仿紧 M 空间是否有类似于 Nagata-Smirnov 度量化定理的特征? 介绍 Michael[282] 引进的 (mod$k$) 基的概念及 Michael-Lutzer 的定理, 讨论了该定理的几种推广, 得到了与 Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理相平行的仿紧 M 空间的刻画. 其二, 相应于 M 空间中的 wΔ 条件, 探讨具有满足 wΔ 条件的局部有限, 或闭包保持闭覆盖列的空间, 导出 Morita-Rishel 的定理: M 空间的逆紧映象恰好是 M* 空间.

定义 3.7.1[282] 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 (mod$k$) 基 (拟 (mod$k$) 基), 如果 $\mathscr{P}$ 是 X 的开 (mod$k$) 网 (开拟 (mod$k$) 网). 具有 σ 局部有限 (mod$k$) 基 (拟 (mod$k$) 基) 的正则空间称为 (mod$k$) 可度量空间 (拟 (mod$k$) 可度量空间).

定理 3.7.2[282] (Michael-Lutzer定理) X 是仿紧 M 空间当且仅当 X 是 (mod$k$) 可度量空间.

证明 必要性来自 Nagata-Smirnov 度量化定理和推论 2.2.7.

充分性. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 局部有限 (mod$k$) 基.

(1) X 是仿紧空间.

记 $\mathscr{K}=\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 对 $\alpha\in\Lambda$, 存在 $\mathscr{U}_\alpha\in\mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $K_\alpha\subset\cup\mathscr{U}_\alpha$, 于是存在 $P_\alpha\in\mathscr{P}$, 使 $K_\alpha\subset P_\alpha\subset\cup\mathscr{U}_\alpha$. 从而 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\{P_\alpha\}\wedge\mathscr{U}_\alpha$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限开加细. 由正则性, X 是仿紧空间.

(2) X 是 wΔ 空间.

记 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的, 并且不妨设 $X\in\mathscr{P}_n$. 对 $n\in\mathbb{N}, P\in\mathscr{P}$, 令 $F_n(P)=\cup\{\overline{Q}\subset P:Q\in\mathscr{P}_n\}$. 则 $F_n(P)$ 是 X 的闭集且 $F_n(P)\subset P$. 对 $n,k\in\mathbb{N}$, 再令

$$\mathscr{F}_{nk}=\{F_n(P):P\in\mathscr{P}_k\},$$
$$\mathscr{R}_{nk}=\{R_{nk}(x):x\in X\},$$

其中

$$R_{nk}(x)=\cap\{P\in\mathscr{P}_k:x\in F_n(P)\}-\cup\{F_n(P):P\in\mathscr{P}_k,x\notin F_n(P)\}.$$

因为 $\mathscr{F}_{nk}$ 是 X 的闭包保持闭集族, 且 $\mathscr{P}_k$ 是 X 的点有限开集族, 所以 $x\in R_{nk}(x)\in\tau$. 从而 $\mathscr{R}_{nk}$ 是 X 的开覆盖. 注意到, 对 $P\in\mathscr{P}_k$, 若 $x\in F_n(P)$, 则 $\mathrm{st}(x,\mathscr{R}_{nk})\subset P$. 事实上, 若 $x\in R_{nk}(y)$, 那么 $y\in F_n(P)$, 于是 $R_{nk}(y)\subset P$, 所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{R}_{nk})\subset P$. 对 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{U}_i=\wedge\{\mathscr{R}_{nk}:n,k\leqslant i\}.$$

往证 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 的 wΔ 序列. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_i\}$, 若 $x_i\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_i)$ 且 $\{x_i\}$ 无聚点, 取 $\alpha\in\Lambda$, 使 $x\in K_\alpha$, 则存在 $m,k\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathscr{P}_k$, 使 $K_\alpha\subset P\subset X-\{x_i:i\geqslant m\}$. 再选取 $n\in\mathbb{N},Q\in\mathscr{P}_n$, 使 $K_\alpha\subset Q\subset\overline{Q}\subset P$. 那么 $x\in K_\alpha\subset F_n(P)$. 取 $j\geqslant\max\{k,m,n\}$. 则 $x_j\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_j)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{R}_{nk})\subset P\subset X-\{x_j\}$, 矛盾. 故 X 是 wΔ 空间.

由推论 2.2.19, X 是仿紧 M 空间.

下面转入讨论遗传闭包保持集族的情形.

引理 3.7.3[234] 设 $\mathscr{P}$ 是 q 空间 X 的遗传闭包保持开集族. 若 $x\in X^d$, 则 $\mathscr{P}$ 在 x 是局部有限的.

证明 令

$$V=X-\cup\{\overline{P}:x\notin\overline{P},P\in\mathscr{P}\}.$$

则 $x \in V \in \tau$, 并且若 $P \in (\mathscr{P})_V$, 那么 $x \in \overline{P}$. 如果 $\mathscr{P}$ 在 x 不是局部有限的, 则存在 $\mathscr{P}$ 的无限集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{P}_n$. 由于 $x \in X^d$, 于是 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{P_n - \{x\}}$. 设 g 是 X 的 q 函数. 那么存在 X 中非平凡的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \in (P_n - \{x\}) \cap g(n, x)$, 这与 $\mathscr{P}$ 及 q 的性质相矛盾. 故 $\mathscr{P}$ 在 x 是局部有限集族.

引理 3.7.4[234] 具有 σ 遗传闭包保持拟 $(\mathrm{mod}k)$ 基的空间具有 σ 局部有限拟 $(\mathrm{mod}k)$ 基.

证明 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于 $\mathscr{H}$ 的 σ-HCP 拟 $(\mathrm{mod}k)$ 基. 先证明 X 是 q 空间. 对 $x \in X$, 取 $H \in (\mathscr{H})_x$. 不妨设 $H \notin \tau$. 置 $\mathscr{P}' = \{P \in \mathscr{P} : H \subset P\}$. 则 $\mathscr{P}'$ 是 H 在 X 的邻域基. 设 $f : X \to X/H$ 是自然商映射. 那么 f 是逆可数紧映射, 于是 $f(\mathscr{P}')$ 是 $f(H)$ 在 X/H 的 σ-HCP 局部基. 由推论 2.5.14, $f(\mathscr{P}')$ 是可数的, 从而 $\mathscr{P}'$ 是可数的. 记 $\mathscr{P}' = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 那么对 X 的序列 $\{x_i\}$, 若 $x_i \in P_i$, 则 $\{x_i\}$ 有聚点. 故 X 是 q 空间.

现在, 记 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP 且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$L_n = \{x \in X : \mathscr{P}_n \text{ 在 } x \text{ 是局部有限的 }\}.$$

那么 $L_{n+1} \subset L_n \in \tau$. 由引理 3.7.3, $X^d \subset L_n$, 从而 $X - L_n$ 是 X 的开闭离散子空间. 定义

$$\mathscr{F}_n = \mathscr{P}_{n|L_n} \cup \{\{x\} : x \in X - L_n\}, n \in \mathbb{N}.$$

那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限开集族. 再定义

$$Z = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n,$$
$$\mathscr{H}' = \mathscr{H}_{|Z} \cup \{\{x\} : x \in X - Z\}.$$

往证 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{H}'$ 的拟 $(\mathrm{mod}k)$ 基. 事实上, 对 $H' \subset U \in \tau$, 其中 $H' \in \mathscr{H}'$, 不妨设存在 $H \in \mathscr{H}$, 使 $H' = H \cap Z$, 那么 $H \subset U \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X - L_n))$, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $H \subset U \cup (X - L_m)$, 从而存在 $i \geqslant m$ 和 $P \in \mathscr{P}_i$, 使 $H \subset P \subset U \cup (X - L_m)$. 因此 $H' \subset P \cap L_i \subset U$ 且 $P \cap L_i \in \mathscr{F}_i$. 故 X 具有 σ 局部有限拟 $(\mathrm{mod}k)$ 基.

定理 3.7.5[234] 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 $(\mathrm{mod}k)$ 可度量空间;

(2) X 具有 σ 离散 $(\mathrm{mod}k)$ 基;

(3) X 具有 σ 遗传闭包保持 $(\mathrm{mod}k)$ 基;

(4) X 具有 σ 紧有限 $(\mathrm{mod}k)$ 基.

证明 由定理 3.7.2, 1.3.2 和命题 3.7.4, 只须证 (4) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{P}$ 是 X 关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 紧有限 $(\mathrm{mod}k)$ 基. 记 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是紧有限的. 利用推论

1.3.4 类似的方法, $\mathscr{P}_n$ 是 X 的局部有限集族. 从而 $\mathscr{P}$ 是 σ 局部有限的 (mod$k$) 基. 故 X 是 (mod$k$) 可度量空间.

由于存在不可度量的 M_1 空间 (见例 1.8.8), 所以具有 σ 闭包保持 (mod$k$) 基的正则空间未必是 (mod$k$) 可度量空间.

本节第二部分, 探讨具有满足 wΔ 条件的闭覆盖列空间的性质.

定义 3.7.6 X 称为 M^* 空间 [174] ($\mathrm{M}^\sharp$ 空间 [352]), 若存在 X 的局部有限 (闭包保持) 闭覆盖列 $\{\mathscr{F}_n\}$, 满足 wΔ 条件. 这时 $\{\mathscr{F}_n\}$ 称为 X 的 M^* 序列 ($\mathrm{M}^\sharp$ 序列).

命题 3.7.7 下述蕴涵关系成立:

(1) M 空间性质 $\Rightarrow$ M^* 空间性质 $\Rightarrow$ $\mathrm{M}^\sharp$ 空间性质 $\Rightarrow$ wM 空间性质 [175];

(2) M^* 空间性质 $\Rightarrow$ Σ 空间性质;

(3) $\mathrm{M}^\sharp$ 空间性质 $\Rightarrow$ $\Sigma^\sharp$ 空间性质.

证明 (7.1) 设 X 是 M 空间. 则存在度量空间 Y 和逆可数紧映射 $f: X\to Y$. 由 Y 的可展性和仿紧性, Y 存在局部有限的闭覆盖列 $\{\mathscr{P}_n\}$ 满足: 对 Y 的点 y 及序列 $\{y_n\}$, 若 $y_n\in \mathrm{st}(y,\mathscr{P}_n)$, 则 $y_n\to y$. 由 f 的逆可数紧性, $\{f^{-1}(\mathscr{P}_n)\}$ 是 X 的 M^* 序列. 从而 X 是 M^* 空间.

(7.2) 由定义 3.7.6, M^* 空间是 $\mathrm{M}^\sharp$ 空间.

(7.3) 设 X 是 $\mathrm{M}^\sharp$ 空间. 让 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的 $\mathrm{M}^\sharp$ 序列, 其中 $\mathscr{F}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{F}_n$. 断言: 对 $k\in\mathbb{N}$, 如果 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\in \mathrm{st}^k(x,\mathscr{F}_n)$, 那么 $\{x_n\}$ 有聚点. 对 k 进行归纳. $k=1$ 是 $\mathrm{M}^\sharp$ 序列的条件. 假定对固定的 $k\in\mathbb{N}$ 命题成立. 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 如果 $x_n\in \mathrm{st}^{k+1}(x,\mathscr{F}_n)$, 则存在 X 的闭集列 $\{F_n\}$ 和序列 $\{y_n\}$, 使 $x_n\in F_n\in\mathscr{F}_n$ 且 $y_n\in F_n\cap \mathrm{st}^k(x,\mathscr{F}_n)$. 由归纳假设, $\{y_n\}$ 有聚点 y. 因为 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的闭包保持的闭覆盖列, 所以若记 $V_n=X-\cup\{F\in\mathscr{F}_n: y\notin F\}$, 那么 $y\in V_n\in\tau$. 于是存在子列 $\{y_{n_i}\}$, 使 $y_{n_i}\in V_i$. 这时存在 X 的闭集列 $\{P_i\}$, 使 $F_{n_i}\subset P_i\in\mathscr{F}_i$. 由于 $V_i\cap P_i\neq\varnothing$, 所以 $y\in P_i$, 于是 $x_{n_i}\in \mathrm{st}(y,\mathscr{F}_i)$, 从而 $\{x_{n_i}\}$ 有聚点. 故断言成立.

置

$$\mathscr{U}_n=\{\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)^\circ: x\in X\}, n\in\mathbb{N}.$$

则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的开覆盖列. 因为 $\mathrm{st}^2(x,\mathscr{U}_n)\subset \mathrm{st}^4(x,\mathscr{F}_n)$, 由断言, $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wM 序列. 故 X 是 wM 空间.

(7.4) 设 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的满足 wΔ 条件的闭覆盖列. 定义 $\mathscr{P}_n=\bigwedge_{i\leqslant n}\mathscr{F}_i, n\in\mathbb{N}$. 则 $\{\mathscr{P}_n\}$ 仍是 X 的满足 wΔ 条件的闭覆盖列. 对 $x\in X$, 任取 X 的集列 $\{P_n\}$, 使 $x\in P_{n+1}\subset P_n\in\mathscr{P}_n$. 令 $C_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}P_n$. 由收敛引理, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的关于 $\{C_x: x\in X\}$ 的闭拟 (mod$k$) 网. 故 M^* 空间是 Σ 空间, $\mathrm{M}^\sharp$ 空间是 $\Sigma^\sharp$ 空间.

问题 3.7.8　(1) $\mathrm{M}^\sharp$ 空间是否是 M^* 空间 [306]?

(2) 正规 wM 空间是否是 M 空间 [175]?

(3) wM 空间是否是 $\mathrm{M}^\sharp$ 空间?

下面介绍问题 3.7.8 的部分结果.

命题 3.7.9[226]　具有满足 wΔ 条件的遗传闭包保持闭覆盖列的空间是 M^* 空间.

证明　设 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的满足 wΔ 条件的 HCP 闭覆盖列. 由命题 3.7.7, X 是 q 空间. 采用引理 3.2.16 的记号, 则 $\{\mathscr{R}(\mathscr{F}_n)\}$ 是 X 的局部有限闭覆盖列. 由于 $\mathscr{R}(\mathscr{F}_n)$ 加细 $\mathscr{F}_n$, 所以 $\{\mathscr{R}(\mathscr{F}_n)\}$ 是 X 的 M^* 序列. 故 X 是 M^* 空间.

定理 3.7.10[191, 348]　下述条件等价:

(1) X 是仿紧 M 空间;

(2) X 是等紧 $\mathrm{M}^\sharp$ 空间;

(3) X 是次亚紧 wM 空间.

证明　由于 wM 空间是 wΔ 空间, 只须证满足 (2) 或 (3) 的空间是仿紧空间. 因为可膨胀的次亚紧空间是仿紧空间 (见附录 A 定理 4.10), 由引理 1.7.5, 满足 (3) 的空间是仿紧空间. 现在设 X 是等紧 $\mathrm{M}^\sharp$ 空间. 让 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的满足 wΔ 条件的闭包保持闭覆盖列, 并且 $\mathscr{F}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{F}_n$. 让 $\mathscr{U}$ 是 X 的定向开覆盖. 对 $x \in X$, 令 $K_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_n)$. 由收敛引理, K_x 是 X 的紧集, 于是存在 $U_x \in \mathscr{U}$ 和 $n_x \in \mathbb{N}$, 使 $K_x \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_{n_x}) \subset U_x$. 置 $\mathscr{P} = \{\mathrm{st}(x, \mathscr{F}_{n_x}) : x \in X\}$. 由于 $x \in \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_{n_x})^\circ$, 所以 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 闭包保持闭加细且 $\mathscr{P}^\circ$ 覆盖 X, 故 X 是仿紧空间 (见附录 A 定理 1.9).

由定理 2.2.12, 有下述推论.

推论 3.7.11　具有 G_δ 对角线的 $\mathrm{M}^\sharp$ 空间是可度量空间.

下面, 依次讨论 M 空间, M^* 空间, $\mathrm{M}^\sharp$ 空间和 wM 空间的映射定理.

定理 3.7.12[306, 313]　Y 是 M^* 空间当且仅当 Y 是 M 空间的逆紧映象.

证明　充分性. 只须证逆可数紧映射保持 M^* 空间. 设 $f: X \to Y$ 是逆可数紧映射, 其中 X 是 M^* 空间. 让 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的 M^* 序列, 其中 $\mathscr{F}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{F}_n$. 往证 Y 的局部有限闭覆盖列 $\{f(\mathscr{F}_n)\}$ 是 Y 的 M^* 序列. 对 Y 的点 y 及序列 $\{y_n\}$, 设 $y_n \in \mathrm{st}(y, f(\mathscr{F}_n))$. 那么存在 X 的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \in \mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{F}_n) \cap f^{-1}(y_n)$. 选取 $a_n \in f^{-1}(y)$, 使 $x_n \in \mathrm{st}(a_n, \mathscr{F}_n)$. 设 a 是 $\{a_n\}$ 在 X 的聚点, 那么存在子列 $\{a_{n_i}\}$, 使 $a_{n_i} \in \mathrm{st}(a, \mathscr{F}_i)$, 从而 $x_{n_i} \in \mathrm{st}^2(a, \mathscr{F}_i)$, 所以 $\{x_{n_i}\}$ 在 X 中有聚点 (见命题 3.7.7(7.3) 的证明), 因而 $\{y_n\}$ 在 Y 中有聚点. 故 $\{f(\mathscr{F}_n)\}$ 是 Y 的 M^* 序列. 因此 Y 是 M^* 空间.

必要性. 设 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 Y 的 M^* 序列, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是 Y 关于有限交封闭的闭覆盖. 对 $i\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{P}_i=\bigwedge_{n\leqslant i}\mathscr{F}_n$. 那么 $\{\mathscr{P}_i\}$ 仍是 Y 的 M^* 序列. 对 $i\in\mathbb{N}$, 记 $\mathscr{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda_i\}$, 并且赋予 Λ_i 离散拓扑. 对 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i$, 令 $K_\alpha=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i}$. 则若 $\{P_{\alpha_i}\}$ 是递减的集列且 $K_\alpha\neq\varnothing$, 那么 $\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 K_α 在 Y 的网. 定义

$$M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i:\{P_{\alpha_i}\}\text{ 是递减的集列且 }K_\alpha\neq\varnothing\}.$$

则 M 是可度量空间. 令

$$X=\{(y,\alpha)\in Y\times M:y\in K_\alpha\},$$

并且让 $f=\pi_{1|X},g=\pi_{2|X}$. 由命题 2.4.7, $f:X\to Y$ 是映射, $g:X\to M$ 是逆可数紧映射. 于是 X 是 M 空间. 往证 f 是逆紧映射. 对 $y\in Y,f^{-1}(y)=\{y\}\times\{\alpha\in M:y\in K_\alpha\}$. 由 $\mathscr{P}_i$ 的点有限性, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集, 所以 f 是紧映射. 对 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha_i\in\Lambda_i(i\leqslant n)$, 置

$$B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{\alpha\in M:\pi_i(\alpha)=\alpha_i,i\leqslant n\}.$$

对 X 的闭集 A, 设 $y\in\overline{f(A)}$. 由于 $M=\cup\{B(\alpha_1):\alpha_1\in\Lambda_1\}$, 于是 $A=\cup\{A\cap(Y\times B(\alpha_1)):\alpha_1\in\Lambda_1\}$, 所以 $f(A)=\cup\{f(A\cap(Y\times B(\alpha_1))):\alpha_1\in\Lambda_1\}$. 又由于 $f(A\cap(Y\times B(\alpha_1)))\subset P_{\alpha_1}$, 并且 $\mathscr{P}_1$ 是局部有限的, 于是 $\overline{f(A)}=\cup\{\overline{f(A\cap(Y\times B(\alpha_1)))}:\alpha_1\in\Lambda_1\}$, 从而存在 $\beta_1\in\Lambda_1$, 使 $y\in\overline{f(A\cap(Y\times B(\beta_1)))}$. 以此类推, 存在 $\beta_i\in\Lambda_i$, 使 $y\in\overline{f(A\cap(Y\times B(\beta_1,\cdots,\beta_n)))}\subset P_{\beta_i}$. 令 $\beta=(\beta_i)$. 那么 $\beta\in M$ 且 $y\in K_\beta$. 下面证明 $(y,\beta)\in A$. (y,β) 在 X 的邻域基元形如 $(V(y)\times B(\beta_1,\cdots,\beta_n))\cap X$, 其中 $V(y)$ 是 y 在 Y 的邻域. 由于 $V(y)\cap f(A\cap(Y\times B(\beta_1,\cdots,\beta_n)))\neq\varnothing$, 所以 $A\cap(V(y)\times B(\beta_1,\cdots,\beta_n))\neq\varnothing$. 从而 $(y,\beta)\in\overline{A}=A$, 因此 $y=f(y,\beta)\in f(A)$, 所以 $f(A)$ 是 Y 的闭集. 故 f 是闭映射.

命题 3.7.13[103, 174, 176]　逆可数紧映射保持仿紧 M 空间, M^* 空间, $\mathrm{M}^\sharp$ 空间以及 wM 空间.

证明　定理 3.7.12 的充分性已证明了逆可数紧映射保持 M^* 空间, 其证明同样适用于 $\mathrm{M}^\sharp$ 空间. 再由定理 3.7.10, 逆可数紧映射保持仿紧 M 空间. 下面证明, 若 $f:X\to Y$ 是逆可数紧映射, 其中 X 是 wM 空间, 则 Y 是 wM 空间. 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wM 序列, 其中 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $n\in\mathbb{N},y\in Y$, 置

$$V(n,y)=Y-f(X-\mathrm{st}(f^{-1}(y),\mathscr{U}_n)).$$

那么 $y\in V(n+1,y)\subset V(n,y)\in\tau(Y)$. 定义

$$\mathscr{V}_n=\{V(n,y):y\in Y\}.$$

往证 $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 Y 的 wM 序列. 首先, 由 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wM 序列, 对 X 的序列 $\{a_n\},\{b_n\}$, 若 $a_n\in\mathrm{st}(b_n,\mathscr{U}_n)$, 那么 $\{a_n\}$ 有聚点当且仅当 $\{b_n\}$ 有聚点. 现在,

对 Y 的点 y 及序列 $\{y_n\}$, 如果 $y_n \in \mathrm{st}^2(y, \mathscr{V}_n)$, 那么存在 Y 的序列 $\{y_{1n}\}, \{y_{2n}\}$ 和 $\{y_{3n}\}$, 使 $\{y_{1n}, y\} \subset V(n, y_{2n}), \{y_n, y_{1n}\} \subset V(n, y_{3n})$. 由于 $f^{-1}(V(n,y)) \subset \mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{U}_n)$, 于是

$$f^{-1}(y_{2n}) \cap \mathrm{st}(f^{-1}(y), \mathscr{U}_n) \neq \varnothing, f^{-1}(y_{1n}) \cap \mathrm{st}(f^{-1}(y_{2n}), \mathscr{U}_n) \neq \varnothing,$$
$$f^{-1}(y_{3n}) \cap \mathrm{st}(f^{-1}(y_{1n}), \mathscr{U}_n) \neq \varnothing, f^{-1}(y_n) \cap \mathrm{st}(f^{-1}(y_{3n}), \mathscr{U}_n) \neq \varnothing.$$

而 f 是逆可数紧映射, 从而 $\{y_n\}$ 有聚点. 所以 Y 是 wM 空间.

由引理 2.1.14, 2.1.15 和 1.7.5, 有下述推论.

推论 3.7.14 让 Φ 表示拓扑性质: M^* 空间, $\mathrm{M}^\sharp$ 空间, wM 空间. 设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 具有性质 Φ, 那么 Y 具有性质 Φ 当且仅当 Y 是 q 空间.

命题 3.7.15[315] wM 空间满足可数紧型分解定理.

证明 设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的 wM 序列, 不妨设 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 让

$Y_n = \{y \in Y:$ 若 S 是 Y 中非平凡的序列, 则存在 $x \in f^{-1}(y)$ 和 S 的子列 S', 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \cap \overline{f^{-1}(S')} = \varnothing\}$.

则 Y_n 是 Y 的闭离散子空间. 否则, 由 f 是闭映射, 于是 $\{f^{-1}(y): y \in Y_n\}$ 不是 X 的局部有限集族, 所以存在 $x \in X$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_i) (\forall i \in \mathbb{N})$ 与无限个 $f^{-1}(y)$ $(y \in Y_n)$ 相交, 从而存在 Y_n 中非平凡的序列 $\{y_i\}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_i) \cap f^{-1}(y_i) \neq \varnothing$. 因为 $y_i \in Y_n$, 由归纳法, 存在子列 $\{y_{i_k}\}$ 和 $x_k \in f^{-1}(y_{i_k})$, 使 $\mathrm{st}(x_k, \mathscr{U}_n) \cap \overline{\cup\{f^{-1}(y_{i_m}): m > k\}} = \varnothing$. 若 c 是 $\{x_k\}$ 的聚点, 那么对 $k \in \mathbb{N}$, 有 $c \in \overline{\bigcup\{f^{-1}(y_{i_m}): m > k\}}$ 且存在 $x_{k_0} \in \mathrm{st}(c, \mathscr{U}_n)$, 于是 $c \in \mathrm{st}(x_{k_0}, \mathscr{U}_n)$, 从而 $c \notin \overline{\bigcup\{f^{-1}(y_{i_m}): m > k\}}$, 矛盾. 因此, $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的闭离散集, 而 f 是闭映射, 所以 $\{y_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 是 Y 的闭离散集. 设 $c_k \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_k) \cap f^{-1}(y_{i_k})$. 那么 $\{c_k : k \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的闭离散集, 且 $c_k \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_k)$, 矛盾.

令 $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. 若 $y \in Y - Z$, 则 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可数紧集. 否则, 存在 $f^{-1}(y)$ 的闭离散集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 由于 $y \notin Y_n$, 存在 Y 中非平凡的序列 $S_n = \{y_i^n\}_i$, 使若 $x \in f^{-1}(y)$ 且 S_n' 是 S_n 的子列, 则 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \cap \overline{f^{-1}(S_n')} \neq \varnothing$. 于是存在 $j_n \in \mathbb{N}$, 使当 $j \geqslant j_n$ 时, $\mathrm{st}(x_n, \mathscr{U}_n) \cap f^{-1}(y_j^n) \neq \varnothing$ 且 $\mathrm{st}(x_1, \mathscr{U}_n) \cap f^{-1}(y_{j_n}^n) \neq \varnothing$. 不妨设 $\{y_{j_n}^n\}$ 是非平凡的序列且 $j_n < j_{n+1}$. 让 $a_n \in \mathrm{st}(x_n, \mathscr{U}_n) \cap f^{-1}(y_{j_n}^n), b_n \in \mathrm{st}(x_1, \mathscr{U}_n) \cap f^{-1}(y_{j_n}^n)$. 由于 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是闭离散的, 由引理 1.7.5(5.1) 所证, $\{\mathrm{st}(x_n, \mathscr{U}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是局部有限的, 从而 $\{\{a_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是局部有限的, 因此 $\{f^{-1}(y_{j_n}^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是离散的, 于是 $\{\{b_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是离散的, 矛盾. 故 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可数紧集.

例 3.7.16 M 空间类与映射.

(1) 逆紧映射不保持 M 空间 [302].

置 $H=(\omega_1+1)\times(\omega_1+1)-\{(\omega_1,\omega_1)\}$. 则 H 是局部紧的可数紧空间. 令

$$P=\omega_1\times\{\omega_1\}, S=\{\omega_1\}\times\omega_1.$$

则 P,S 都是 H 的闭子空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 取定同胚映射 $h_n:H\to H_n$. 不妨设当 $n\neq m$ 时, $H_n\cap H_m=\varnothing$. 定义 $X=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}H_n$. 则 X 是局部紧的 M 空间. 定义 X 的商空间 Y 如下: 对 $p\in P$, 贴合点 $h_{2n-1}(p)$ 与 $h_{2n}(p)$; 对 $s\in S$, 贴合点 $h_{2n}(s)$ 与 $h_{2n+1}(s)$. 设 $f:X\to Y$ 是自然商映射.

(16.1) f 是逆紧映射.

显然, f 是紧映射. 设 $f^{-1}(y)\subset U\in\tau(X)$. 若 $|f^{-1}(y)|=1$, 让 $V=f(U-\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}h_n(P\cup S))$, 则 $y\in V\in\tau(Y)$ 且 $f^{-1}(V)\subset U$. 若 $|f^{-1}(y)|>1$, 不妨设存在 $m\in\mathbb{N},p\in P$, 使 $f^{-1}(y)=\{h_{2m-1}(p),h_{2m}(p)\}$, 于是存在 $W\in\tau(H)$, 使 $p\in W,W\cap S=\varnothing$, 且 $h_{2m-1}(W)\oplus h_{2m}(W)\subset U$. 让 $V=f(h_{2m-1}(W)\oplus h_{2m}(W))$. 则 $f^{-1}(V)=h_{2m-1}(W)\oplus h_{2m}(W)$, 从而 $y\in V\in\tau(Y)$ 且 $f^{-1}(V)\subset U$. 故 f 是闭映射.

(16.2) Y 不是 M 空间.

若不然, 存在度量空间 Z 和逆可数紧映射 $g:Y\to Z$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $g_n=g\circ f\circ h_n:H\to Z$. 那么 $g_n(H)$ 是紧度量空间, 从而 $g_n(H)$ 可嵌入 Hilbert 方体 $\mathbb{I}^{\aleph_0}$. 因为 P,S 均同胚于 ω_1, 于是存在 $\alpha_n<\omega_1$, 使 g_n 在 $((\alpha_n,\omega_1)\times\{\omega_1\})\cup(\{\omega_1\}\times(\alpha_n,\omega_1))$ 上取常值 z_n. 然而, 当 $p\in P$ 时, $g_{2n-1}(p)=g_{2n}(p)$, 当 $s\in S$ 时, $g_{2n}(s)=g_{2n+1}(s)$, 于是所有 $z_n=z_1$, 从而 $g^{-1}(z_1)\cap f(H_n)$ 是无限集, 故存在 Y 的无限集 $\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$, 使 $y_n\in g^{-1}(z_1)\cap f(H_n)$. 因为 $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的局部有限集族, 所以 $\{f(H_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 的 HCP 集族, 因而 $\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 Y 的离散集. 这与 $g^{-1}(z_1)$ 的可数紧性相矛盾.

(2) 闭映射不保持仿紧 M 空间, 如例 2.11.9.

(3) 仿紧 M 空间的闭映象不表为 Lašnev 空间的逆紧逆象, 如例 2.11.9 中的空间 X. 易验证, Lašnev 空间的逆紧逆象是 Σ 空间.

例 3.7.17 M 空间类.

(1) 可数拟 (mod$k$) 基 $\not\Rightarrow$ wM 空间 [214].

让 $X=[0,\omega]\times[0,\omega_1]-\{(\omega,\omega_1)\}$. 则 X 是局部紧空间. 对 $\alpha\leqslant\omega$, 令 $C_\alpha=\{\alpha\}\times[0,\omega_1]-\{(\omega,\omega_1)\}$. 那么 $\{C_\alpha\}_{\alpha\leqslant\omega}$ 是 X 的可数紧的闭覆盖. 对 $n<\omega$, 置 $U_n=[n,\omega]\times[0,\omega_1)$. 则 $U_n\in\tau(X)$. 若 $C_\omega\subset V\in\tau(X)$, 则存在 $m<\omega$, 使 $U_m\subset V$. 否则, 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\in U_n-V$, 并记 $x_n=(a_n,b_n)$. 不妨设 $b_n\to b<\omega_1$. 则 $x_n\to(\omega,b)\in C_\omega\subset V$, 矛盾. 这表明, $\{U_n:n<\omega\}\cup\{C_\alpha:\alpha<\omega\}$ 是 X 的关于 $\{C_\alpha\}_{\alpha\leqslant\omega}$ 的可数拟 (mod$k$) 基.

往证 X 不是可数仿紧空间. 否则, 由于 $\{(n,\omega_1): n<\omega\}$ 是 X 的闭离散集, 存在 X 的局部有限的开集族 $\{V_n: n<\omega\}$, 使 $(n,\omega_1)\in V_n$. 对 $n<\omega$, 存在 $\beta_n<\omega_1$, 使 $\{(n,y)\in X: y>\beta_n\}\subset V_n$. 取 $\beta<\omega_1$, 使 $\beta>\sup\{\beta_n: n<\omega\}$. 则 $\{V_n\}$ 在点 (ω,β) 不是局部有限的, 矛盾.

(2) M^* 空间 $\not\Rightarrow$ M 空间, 如例 3.7.16(1) 中的空间 Y.

(3) 一致基 $\not\Rightarrow$ wM 空间, 如例 1.8.1 的 V 空间.

3.8 ℵ 空 间

本节致力于 ℵ 空间性质的研究, 主要围绕伪基, cs 网, k 网这一组概念与 σ 离散集族, σ 局部有限集族, σ 遗传闭包保持集族这一组概念的结合产生的广义度量空间的等价性. 经过 Foged[110], Junnila 和恽自求 [193] 等的工作, 这些空间类之间的关系已经很明朗. 从 ℵ 空间引人入胜的刻画, 反映出一般拓扑学工作者追求的目标. 本节分四部分介绍 ℵ 空间类. 首先, 研究具有 σ-HCP 伪基的正则空间; 其次, 探讨具有 σ 离散 k 网的空间与 ℵ 空间, cs-σ 空间的等价性; 再次, 论述具有 σ 遗传闭包保持 cs 网的空间与 ℵ 空间的等价性; 最后, 揭示 ℵ 空间类的映射定理.

定理 3.8.1[221] 正则空间 X 具有 σ 遗传闭包保持伪基当且仅当或者 X 是 $\aleph_0$ 空间, 或者 X 是所有紧集是有限集的 σ 闭离散空间.

证明 必要性. 设 X 具有 σ-HCP 伪基 $\mathscr{P}$. 若 X 的所有紧集是有限集, 由引理 3.2.35, X 是 σ 闭离散空间. 设 X 存在无限紧集 K. 则 X 是 $\aleph_1$ 紧空间. 否则, X 存在离散闭集 A, 使 $|A|=\aleph_1$. 不妨设 $A\cap K=\varnothing$, 记 $A=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 对 $\alpha<\omega_1$, 令 $V_\alpha=X-(A-\{x_\alpha\})$. 那么 X 的紧集 $K\cup\{x_\alpha\}\subset V_\alpha\in\tau$, 于是存在 $P_\alpha\in\mathscr{P}$, 使 $K\cup\{x_\alpha\}\subset P_\alpha\subset V_\alpha$. 由 V_α 的构造, $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 是 $\mathscr{P}$ 的由互不相同元组成的子集, 不妨认为它是 HCP. 因为 $K\subset\bigcap_{\alpha<\omega_1}P_\alpha$, 所以 K 的任何可数集是 X 的离散闭集, 这与 K 的紧性相矛盾. 故 X 是 $\aleph_1$ 紧空间.

现在, 记 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$E_n=\{x\in X: |(\mathscr{P}_n)_x|>\aleph_0\},$$
$$\mathscr{F}_n=\{P-E_n: P\in\mathscr{P}_n\}\cup\{\{x\}: x\in E_n\}.$$

由引理 3.2.13, E_n 是 X 的可数闭离散子空间, $\mathscr{F}_n$ 是可数集族. 往证 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 X 的 k 网. 对 X 的紧集 $K\subset U\in\tau$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathscr{P}_m$, 使 $K\subset P\subset U$, 于是 $\{P-E_m\}\cup\{\{x\}: x\in K\cap E_m\}$ 是 $\mathscr{F}_m$ 的有限集且 $K\subset(P-E_m)\cup(K\cap E_m)\subset U$. 因而 X 具有可数 k 网, 故 X 是 $\aleph_0$ 空间.

充分性. 只须证所有紧集是有限的 σ 闭离散空间 X 具有 σ-HCP 伪基. 记 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$, 其中 X_n 是 X 的闭离散集且 $X_n\subset X_{n+1}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{P}_n = \{A \subset X_n : |A| \leqslant n\}.$$

那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ-HCP 伪基.

由此, 具有 σ-HCP 伪基的正则空间是 ℵ 空间; ℵ 空间是具有 σ-HCP 伪基的空间当且仅当它或者是 Lindelöf 空间, 或者是所有紧集为有限集的空间.

本节第二部分, 介绍 ℵ 空间, cs-σ 空间以及具有 σ 离散 k 网 (或 cs 网) 的空间之间的等价性问题.

引理 3.8.2[110] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数闭 k 网. 若 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 W 是 x 的序列邻域, 则存在 $\mathscr{P}' \in (\mathscr{P})_x^{<\omega}$, 使 $\{x_n\}$ 终于 $\cup\mathscr{P}' \subset W$.

证明 记

$$\{\mathscr{P}' \in (\mathscr{P})_x^{<\omega} : \{x_n\} \text{ 终于 } \cup \mathscr{P}'\} = \{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

若引理结论不成立, 则存在 X 的序列 $\{y_n\}$, 使 $y_n \in \bigcap_{i\leqslant n}(\cup\mathscr{P}_i) - W$, 从而 $y_n \to x$. 这与 W 是 x 的序列邻域相矛盾.

引理 3.8.3[319] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的 σ 遗传闭包保持集族. 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^* 网, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网.

证明 记 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP. 设 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 令 $F_n = \cup\{P \in \mathscr{P}_n : P \subset U\}$. 若存在序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \in K - \bigcup_{i\leqslant n} F_i$, 则存在子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 $x \in X, m \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathscr{P}_m$, 使 $\{x\} \cup \{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset P \subset U$, 于是 $x_{n_m} \in F_m$, 矛盾. 因而存在 $k \in \mathbb{N}$, 使 $K \subset \bigcup_{i\leqslant k} F_i$. 由引理 2.5.4, 存在 $\mathscr{F} \in (\bigcup_{i\leqslant k} \mathscr{P}_i)^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F} \subset U$. 故 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网.

下面介绍优美的 Foged 定理.

定理 3.8.4[110] (Foged 定理) 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 离散 cs 网;

(2) X 具有 σ 离散 k 网;

(3) X 是 cs-σ 空间;

(4) X 具有 σ 局部有限 cs^* 网;

(5) X 是 ℵ 空间.

证明 由引理 3.8.3, 只须证 (5) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_m$ 是 X 的 k 网, 其中 $\mathscr{P}_m$ 是关于有限交封闭的局部有限闭集族且 $\mathscr{P}_m \subset \mathscr{P}_{m+1}$. 记 $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对 $m \in \mathbb{N}$, 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_m$, 使 $\mathscr{U}_m$ 的每一元仅交 $\mathscr{P}_m$ 的有限个元. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{F_\beta : \beta \in \Gamma_{mn}\}$ 是 $\mathscr{U}_m$ 的加细, 其中 $\{F_\beta : \beta \in \Gamma_{mn}\}$ 是 X 的离散闭集族. 于是, 若 $\beta \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{mn}$, 则 F_β 仅与 $\mathscr{P}_m$ 的有限个元相交. 对 $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 由定理 3.4.11(11.1), 存在互不相交集族 $\{W_\beta : \beta \in \Gamma_{mn}\}$, 使 W_β 是 F_β 的序列邻域. 令

$$A_{mn}=\{(\alpha,\beta):P_\alpha\in\mathscr{P}_m,\beta\in\Gamma_{mn}\text{ 且 }P_\alpha\cap F_\beta\neq\varnothing\}.$$

则 $\{P_\alpha\cap W_\beta:(\alpha,\beta)\in A_{mn}\}$ 是星有限集族. 事实上, 如果对 $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in A_{mn}$, 有 $(P_\alpha\cap W_\beta)\cap(P_\gamma\cap W_\delta)\neq\varnothing$, 那么 $\beta=\delta$, 从而 $(\gamma,\beta)\in A_{mn}$, 所以 $P_\gamma\cap F_\beta\neq\varnothing$. 因此仅对有限对 $(\gamma,\delta)\in A_{mn}$, 有 $(P_\alpha\cap W_\beta)\cap(P_\gamma\cap W_\delta)\neq\varnothing$.

取定 $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, 对 $(\alpha,\beta)\in A_{mn},i\in\mathbb{N}$, 置

$$H(\alpha,\beta,i)=\cup\{P_\alpha\cap P_\gamma:P_\gamma\in\mathscr{P}_i,P_\gamma\subset W_\beta\},$$
$$\mathscr{H}(m,n,i)=\{H(\alpha,\beta,i):(\alpha,\beta)\in A_{mn}\}.$$

那么 $H(\alpha,\beta,i)\subset P_\alpha\cap W_\beta$, 所以 $\mathscr{H}(m,n,i)$ 是星有限集族. 由引理 2.8.5, $\mathscr{H}(m,n,i)$ 是 σ 互不相交集族. 由 $\mathscr{P}_m\wedge\mathscr{P}_i$ 的局部有限性, $\mathscr{H}(m,n,i)$ 是闭包保持集族, 因此 $\mathscr{H}(m,n,i)$ 是 σ 离散集族. 定义

$$\mathscr{H}=\cup\{\mathscr{H}(m,n,i):m,n,i\in\mathbb{N}\}.$$

则 $\mathscr{H}$ 是 σ 离散闭集族, 于是记 $\mathscr{H}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_k$, 其中 $\mathscr{H}_k$ 是离散闭集族且对 $i,j\in\mathbb{N}$, 若 $i\neq j$, 那么 $\mathscr{H}_i\cap\mathscr{H}_j=\varnothing$. 令

$$\mathscr{R}=\{\mathscr{F}\in\mathscr{H}^{<\omega}:\cap\mathscr{F}\neq\varnothing\}.$$

对 $I\in\mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$\mathscr{R}(I)=\{\mathscr{F}\in\mathscr{R}:\{k\in\mathbb{N}:\mathscr{F}\cap\mathscr{H}_k\neq\varnothing\}=I\}.$$

则 $\{\cap\mathscr{F}:\mathscr{F}\in\mathscr{R}(I)\}=\bigwedge_{k\in I}\mathscr{H}_k$ 是局部有限的. 若 $\mathscr{F}_1\neq\mathscr{F}_2\in\mathscr{R}(I)$, 则存在 $k\in\mathbb{N}$ 和 $H_1\neq H_2\in\mathscr{H}_k$, 使 $\mathscr{F}_1\cap\mathscr{H}_k=\{H_1\}$ 且 $\mathscr{F}_2\cap\mathscr{H}_k=\{H_2\}$, 于是 $H_1\cap H_2=\varnothing$, 从而 $(\cap\mathscr{F}_1)\cap(\cap\mathscr{F}_2)=\varnothing$. 因此 $\{\cap\mathscr{F}:\mathscr{F}\in\mathscr{R}(I)\}$ 是离散闭集族. 再由定理 3.4.11(11.1), 存在互不相交集族 $\{V(\mathscr{F}):\mathscr{F}\in\mathscr{R}(I)\}$, 使 $V(\mathscr{F})$ 是 $\cap\mathscr{F}$ 的序列邻域. 对 $j\in\mathbb{N},\mathscr{F}\in\mathscr{R}(I)$, 定义

$$V(\mathscr{F},j)=\cup\{H\cap P_\delta:H\in\mathscr{F},P_\delta\in\mathscr{P}_j\text{ 且 }P_\delta\subset V(\mathscr{F})\},$$
$$\mathscr{V}(I,j)=\{V(\mathscr{F},j):\mathscr{F}\in\mathscr{R}(I)\}.$$

那么 $V(\mathscr{F},j)\subset V(\mathscr{F})$. 由于 $(\bigcup_{k\in I}\mathscr{H}_k)\wedge\mathscr{P}_j$ 是局部有限集族, 所以 $\mathscr{V}(I,j)$ 是离散集族. 置

$$\mathscr{V}=\cup\{\mathscr{V}(I,j):I\in\mathbb{N}^{<\omega},j\in\mathbb{N}\}.$$

那么 $\mathscr{V}$ 是 X 的 σ 离散集族. 往证 $\mathscr{V}$ 是 X 的 cs 网.

设 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in U\in\tau$. 则存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\mathscr{F}_1\in\mathscr{P}_m^{<\omega}$, 使 $\{x_n\}$ 终于 $\cup\mathscr{F}_1\subset U$. 不妨设 $x\in\cap\mathscr{F}_1$. 选取 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\beta\in\Gamma_{mn}$, 使 $x\in F_\beta$. 而 W_β 是 F_β 的序列邻域, 由引理 3.8.2, 存在 $i\in\mathbb{N}$ 和 $\mathscr{F}_2\in\mathscr{P}_i^{<\omega}$, 使 $\{x_n\}$ 终于 $\cup\mathscr{F}_2\subset W_\beta$. 由于 $x\in\cup\mathscr{F}_2$, 所以 $x\in\cap\{H(\alpha,\beta,i):P_\alpha\in\mathscr{F}_1\}$. 如果 $P_\alpha\in\mathscr{F}_1$ 且 $P_\gamma\in\mathscr{F}_2$, 那么 $P_\alpha\cap P_\gamma\subset H(\alpha,\beta,i)$, 因此 $(\cup\mathscr{F}_1)\cap(\cup\mathscr{F}_2)\subset\cup\{H(\alpha,\beta,i):P_\alpha\in\mathscr{F}_1\}$. 令

$$\mathscr{F}=\{H(\alpha,\beta,i):P_\alpha\in\mathscr{F}_1\}.$$

那么 $x \in \cap\mathscr{F}$ 且 $\{x_n\}$ 终于 $\cup\mathscr{F}$, 所以 $\mathscr{F} \in \mathscr{R}$. 再由引理 3.8.2, 存在 $j \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{F}_3 \in \mathscr{P}_j^{<\omega}$, 使 $\{x_n\}$ 终于 $\cup\mathscr{F}_3 \subset V(\mathscr{F})$. 因为 $(\cup\mathscr{F}) \cap (\cup\mathscr{F}_3) \subset V(\mathscr{F}, j)$, 所以 $\{x_n\}$ 终于 $V(\mathscr{F}, j) \subset \cup\mathscr{F} \subset \cup\mathscr{F}_1 \subset U$. 故 $\mathscr{V}$ 是 X 的 cs 网.

本节第三部分, 讨论具有 σ 遗传闭包保持 k 网的空间, 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网的空间与 ℵ 空间的精确关系.

命题 3.8.5[232, 409] S_{ω_1} 不具有 σ 遗传闭包保持 cs 网.

证明 若不然, 记 $S_{\omega_1} = \{(\alpha, 1/n) : \alpha < \omega_1, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$, 其中序列 $\{(\alpha, 1/n)\}$ 收敛于 ∞. 设 $\mathscr{P}$ 是 S_{ω_1} 的 σ 遗传闭包保持 cs 网.

对 $\alpha < \omega_1$, 令 $S^{(\alpha)} = \{(\alpha, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$. 利用超限归纳法证明, $\mathscr{P}$ 的子集 $\{P \in \mathscr{P} : |S^{(0)} \cap P| = \aleph_0\}$ 是不可数的. 这与引理 2.5.4 相矛盾.

因为 $\mathscr{P}$ 是 cs 网, 存在 $P_0 \in \mathscr{P}$, 使 $S^{(0)}$ 是终于 P_0 的. 取 $p_0 \in S^{(0)} \cap P_0$. 设 $0 < \alpha < \omega_1$, 并对 $\beta < \alpha$ 已取定 $P_\beta \in \mathscr{P}, p_\beta \in S^{(\beta)} \cap P_\beta$, 使 $|S^{(0)} \cap P_\beta| = \aleph_0$. 把 $S^{(0)} \cup S^{(\alpha)}$ 作为一序列, 使其奇子列和偶子列分别是 $S^{(0)}$ 和 $S^{(\alpha)}$, 则存在 $P_\alpha \in \mathscr{P}$, 使 $S^{(0)} \cup S^{(\alpha)}$ 是终于 $P_\alpha \subset S_{\omega_1} - \{p_\beta : \beta < \alpha\}$. 这时, $|S^{(0)} \cap P_\alpha| = \aleph_0$, 且 $P_\beta \neq P_\alpha$. 从而 $\{P \in \mathscr{P} : |S^{(0)} \cap P| = \aleph_0\}$ 是不可数的.

引理 3.8.6[193] 设空间 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 若 $\mathscr{F}$ 是 X 的遗传闭包保持集族, 则对 $x \in X, \{F \in \mathscr{F} : F - \{x\}$ 含序列收敛于 $x\}$ 是可数的.

证明 若存在 $y \in X$ 及 $\mathscr{F}$ 的不可数集 $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 满足: $F_\alpha - \{y\}$ 含子集 $Y_\alpha = \{y_{\alpha n} : n \in \mathbb{N}\}$, 使 $y_{\alpha n} \to y$. 由引理 2.5.4, 不妨设 $\mathscr{F}$ 在 $y_{\alpha n}$ 是点有限的, 于是 $\{F \in \mathscr{F} : F \cap Y_\alpha \neq \varnothing\}$ 是可数的, 所以 $\{Y_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 是星可数族. 由引理 2.8.5, $\{Y_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 是 σ 互不相交族, 不妨设它是互不相交族. 由 $\mathscr{F}$ 的 HCP 性, X 的闭子空间 $\{y\} \cup (\bigcup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha)$ 同胚于 S_{ω_1}, 矛盾.

引理 3.8.7[193] 设具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 若 D 是 X 的闭离散子空间, 则存在 X 的 σ 离散闭集族 $\mathscr{H}$, 使对 X 的紧集 K 及 $d \in K \cap D, \{H \in \mathscr{H} : d \in \mathrm{int}_K(K \cap H)\}$ 是 d 在 X 的网.

证明 首先注意到, X 是 σ 空间, 于是 X 的紧集可度量. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的 k 网, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是 HCP 闭集族且 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$. 对 $x \in X$, 让

$$\mathscr{F}_x = \{F \in \mathscr{F} : F \text{ 存在紧集 } K, \text{ 使 } x \in \overline{K - \{x\}}\}.$$

由引理 3.8.6, $|\mathscr{F}_x| \leqslant \aleph_0$, 于是记 $\{\cup\mathscr{F}' : \mathscr{F}' \in \mathscr{F}_x^{<\omega}\} \cup \{\{x\}\} = \{F_{kx}\}_{k\in\mathbb{N}}$. 对 $n \in \mathbb{N}, d \in D$, 取 d 的闭邻域 $G_{nd} \subset X - \cup\{F \in \mathscr{F}_n : d \notin F\}$. 令 $P_{nd} = \cup\{F \in \mathscr{F}_n : F \cap D = \{d\}\}$. 那么 $\{G_{nd} \cap P_{nd} : d \in D\}$ 是 X 的离散闭集族. 定义

$$\mathscr{H}_{kn} = \{F_{kd} \cap G_{nd} \cap P_{nd} : d \in D\},\ k, n \in \mathbb{N};$$

$$\mathscr{H} = \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_{kn}.$$

则 $\mathscr{H}$ 是 X 的 σ 离散闭集族. 往证 $\mathscr{H}$ 满足引理的要求. 对 X 的紧集 K 及

$d \in K \cap D$, 让 U 是 d 的邻域. 选取 d 的闭邻域 $V \subset U - (D - \{d\})$. 于是有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{F}' \in \mathscr{F}_n^{<\omega}$, 使 $K \cap V \subset \cup\mathscr{F}' \subset U - (D - \{d\})$. 选取 $k \in \mathbb{N}$, 使 $F_{kd} = \cup(\mathscr{F}' \cap \mathscr{F}_d) \cup \{d\}$. 则 $d \in F_{kd} \cap G_{nd} \cap P_{nd} \subset U$. 下面验证 $d \in \mathrm{int}_K(K \cap F_{kd} \cap G_{nd} \cap P_{nd})$. 由于 $d \in \mathrm{int}_K(K \cap V) \subset \mathrm{int}_K(K \cap (\cup\mathscr{F}'))$, 于是 $d \in \mathrm{int}_K(K \cap (\cup(\mathscr{F}')_d)) \subset \mathrm{int}_K(K \cap P_{nd})$. 又由于 $d \in G_{nd}^\circ$, 所以 $d \in \mathrm{int}_K(K \cap G_{nd})$. 对 $F \in \mathscr{F}'$, 让

$$W(F) = X - \overline{F \cap K - \{d\}},$$
$$W = \cap\{W(F) : F \in \mathscr{F}' \text{ 且 } d \in W(F)\}.$$

那么 $d \in W \in \tau$ 且 $\{F \in \mathscr{F}' : F \cap K \cap W \neq \varnothing\} \subset \mathscr{F}' \cap \mathscr{F}_d$, 从而 $K \cap (\cup\mathscr{F}') \cap W \subset F_{kd}$, 因此 $d \in \mathrm{int}_K(K \cap F_{kd})$. 综上所述, $d \in \mathrm{int}_K(K \cap F_{kd} \cap G_{nd} \cap P_{nd})$.

下述定理达到了第三步的要求.

定理 3.8.8 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 $\aleph$ 空间;

(2) X 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网 [232, 409];

(3) X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网且不含闭子空间同胚于 S_{ω_1} [193]. (Junnila-Yun 定理)

证明 由定理 3.8.4, 引理 3.8.3 以及命题 3.8.5, 只须证 (3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的 k 网, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是 HCP 闭集族且 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$D_n = \{x \in X : |(\mathscr{F}_n)_x| \geqslant \aleph_0\}.$$

则 D_n 是 X 的闭集, 并且由引理 3.2.21 的 (21.2), 可以记 $D_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_{nk}$, 其中 D_{nk} 是 X 的闭离散集且 $D_{nk} \subset D_{nk+1}$. 对 $n, k \in \mathbb{N}$, 存在 X 的离散闭集族 $\mathscr{H}_{nk}$, 满足引理 3.8.7 的要求 ($\mathscr{H} = \mathscr{H}_{nk}, D = D_{nk}$). 置

$$F_{nk} = \cup\{F \in \mathscr{F}_k : F \cap D_n = \varnothing\},$$
$$\mathscr{F}_{nk} = \mathscr{F}_{n|F_{nk}}.$$

由于 $\mathscr{F}_n$ 在 $X - D_n$ 是局部有限的, 所以 $\mathscr{F}_{nk}$ 是 X 的局部有限集族. 下面证明 $\mathscr{P} = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} (\mathscr{H}_{nk} \cup \mathscr{F}_{nk})$ 是 X 的 k 网. 对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{F}' \in \mathscr{F}_n^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F}' \subset U$. 由引理 2.5.10, $K \cap D_n$ 是有限集, 于是存在 $k \in \mathbb{N}$, 使 $K \cap D_n \subset D_{nk}$. 对 $d \in K \cap D_n$, 由 $\mathscr{H}_{nk}$ 的性质, 存在 $H_d \in \mathscr{H}_{nk}$, 使 $d \in \mathrm{int}_K(K \cap H_d)$ 且 $H_d \subset U$. 令

$$L = K - \cup\{\mathrm{int}_K(K \cap H_d) : d \in K \cap D_n\}.$$

则存在 $i \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{F}'' \in \mathscr{F}_i^{<\omega}$, 使 $L \subset \cup\mathscr{F}'' \subset X - D_n$, 于是 $L \subset F_{ni}$. 定义

$$\mathscr{P}' = \{H_d : d \in K \cap D_n\} \cup \{F \cap F_{ni} : F \in \mathscr{F}''\}.$$

则 $\mathscr{P}' \in \mathscr{P}^{<\omega}$ 且 $K \subset \cup\mathscr{P}' \subset U$. 故 X 是 $\aleph$ 空间.

由例 1.8.7 的 (7.5), 有下述推论.

推论 3.8.9 正则空间 X 是 ℵ 空间当且仅当 X 既具有 σ 遗传闭包保持 k 网, 又具有点可数 cs^* 网.

推论 3.8.10[193] 设 X,Y 是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间. $X\times Y$ 具有 σ 遗传闭包保持 k 网当且仅当或者 X,Y 都是 ℵ 空间, 或者 X,Y 之一的所有紧集是有限集.

证明 必要性. 如果 X 不是 ℵ 空间, 由定理 3.8.8, X 含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 再由例 2.5.22, Y 不含子空间同胚于 $\mathbb{S}_1$, 于是 Y 的所有紧集是有限集.

充分性. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的 k 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP, 并且设 Y 的所有紧集是有限集. 由引理 3.2.35, 可以记 $Y=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}Y_k$, 其中 Y_k 是 Y 的闭离散子空间. 对 $n,k\in\mathbb{N}$, 定义

$$\mathscr{F}_{nk}=\{P\times\{y\}:P\in\mathscr{P}_n,y\in Y_k\}.$$

则 $\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_{nk}$ 是 $X\times Y$ 的 σ 遗传闭包保持 k 网.

推论 3.8.11 设积空间 $X=\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间. 若每一 $|X_n|\geqslant 2$, 则 X 是 ℵ 空间.

问题 3.8.12[319] 定义适当的基以刻画 ℵ 空间.

本节第四部分, 讨论 ℵ 空间类的映射定理. 由命题 1.6.9, 2.7.2 和 2.1.13, 有下述结果.

命题 3.8.13 设映射 $f:X\to Y$, 其中 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是正则空间. 若 f 满足下述条件之一, 则 Y 是 $\aleph_0$ 空间.

(1) f 是序列商映射;

(2) f 是序列覆盖映射;

(3) f 是闭映射.

问题 3.8.14 $\aleph_0$ 空间的正则的开紧映象是否是 $\aleph_0$ 空间?

由定理 3.4.12, 下述命题成立.

命题 3.8.15 设 $f:X\to Y$ 是闭映射. 若 X 具有下述性质, 则 Y 具有相应的性质.

(1) 具有 σ 遗传闭包保持闭伪基.

(2) 具有 σ 遗传闭包保持闭 k 网.

定理 3.8.16[127, 223, 366] 设 $f:X\to Y$ 是 L 闭映射, 其中 Y 是正则空间. 若 X 是 ℵ 空间, 那么 Y 是 ℵ 空间.

证明 由命题 3.8.15, Y 具有 σ 遗传闭包保持 k 网. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 局部有限 cs 网, 由于 f 是闭 L 映射, $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的点可数 cs^* 网. 再由推论 3.8.9, Y 是 ℵ 空间.

定理 3.8.17[257]　设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 若 X 是 $k, \aleph$ 空间, Y 是正则空间, 则下述条件等价:

(1) Y 是 $\aleph$ 空间;

(2) Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1};

(3) f 是边缘 L 映射.

证明　由引理 2.1.15, 定理 3.8.16 和 3.8.8 得 (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2). 由定理 3.4.16 得 (2) $\Rightarrow$ (3).

对空间 Y, Y 的特征记为 $\chi(Y) = \min\{\alpha:$ 对 $y \in Y, y$ 在 Y 中局部基的基数不超过 $\alpha\}$.

下述推论平行于 Hanai-Morita-Stone 定理.

推论 3.8.18[128]　设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 若 X 是度量空间, 则下述条件等价:

(1) Y 是 $\aleph$ 空间;

(2) f 是边缘 L 映射;

(3)(CH) $\chi(Y) \leqslant \aleph_1$.

证明　定理 3.8.17 已证明了 (1) $\Leftrightarrow$ (2). 因为 $\chi(S_{\omega_1}) > \aleph_1$, 由定理 3.8.17 得 (3) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). 由引理 2.1.15, 不妨设 f 是闭 L 映射. 固定 $y \in Y$, 则 $f^{-1}(y)$ 具有可数基, 由 CH, $|f^{-1}(y)| \leqslant \aleph_1$. 对 $x \in X$, 设 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的可数局部基. 让 $\mathscr{U} = \cup\{\mathscr{U}_x : x \in f^{-1}(y)\}$, $\mathscr{B} = \{Y - f(X - \cup\mathscr{U}') : \mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数集$\}$. 那么 $|\mathscr{B}| \leqslant \aleph_1$, 并且 $\mathscr{B}$ 是 y 的局部基. 故 $\chi(Y) \leqslant \aleph_1$.

由此可得到与定理 2.3.10 相似的结果: 对度量空间 X, X 的每一闭映象是 $\aleph$ 空间当且仅当 X^d 是 X 的 Lindelöf 子空间.

下面介绍 $\aleph$ 空间的逆紧逆象 G_δ 对角线定理.

引理 3.8.19[223]　设正则空间 X 是 $\aleph$ 空间的逆紧逆象. 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 那么

(1) $\mathscr{U}$ 存在 σ 离散闭加细 $\mathscr{F}$, 使 $\mathscr{K}(X)$ 加细 $\mathscr{F}^F$.

(2) $\mathscr{U}$ 存在开加细序列 $\{\mathscr{W}_n\}$ 满足: 对 X 的非空紧集 K, 存在 $m \in \mathbb{N}, \{K_i : i \leqslant m\} \subset \mathscr{K}(X), \{n_i : i \leqslant m\} \subset \mathbb{N}$, 使 $K = \bigcup_{i \leqslant m} K_i$ 且 $|(\mathscr{W}_{n_i})_{K_i}| = 1$.

证明　设 $f: X \to Y$ 是逆紧映射, 其中 Y 是 $\aleph$ 空间. 让 $\mathscr{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 Y 的 k 网, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是离散闭集族. 由正则性, 选取 X 的开覆盖 $\mathscr{V}$, 使 $\overline{\mathscr{V}}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对 $y \in Y$, 由 f 的逆紧性, 存在 y 的开邻域 H_y, 使 $f^{-1}(H_y)$ 含于 $\mathscr{V}$ 中有限个元的并内. 不妨设 $\mathscr{P}$ 加细 $\{H_y\}_{y \in Y}$. 那么对 $P \in \mathscr{P}$, 存在 $\mathscr{V}_P \in \mathscr{V}^{<\omega}$, 使 $f^{-1}(P) \subset \cup\mathscr{V}_P$. 置 $\mathscr{F} = \cup\{\{f^{-1}(P)\} \wedge \mathscr{V}_P^- : P \in \mathscr{P}\}$. 则 $\mathscr{F}$ 满足 (1).

记 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$, 其中 $\mathscr{F}_n=\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda_n\}$ 是 X 的闭离散集族. 对 $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\Lambda_n$, 取 $U_\alpha\in\mathscr{U}$, 使 $F_\alpha\subset U_\alpha$. 令

$$W_\alpha=U_\alpha-\cup\{F_\beta:\beta\in\Lambda_n-\{\alpha\}\},$$
$$\mathscr{W}_n=\{W_\alpha:\alpha\in\Lambda_n\}\cup\{U-\cup\mathscr{F}_n:U\in\mathscr{U}\}.$$

则 $\{\mathscr{W}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细序列. 对 $K\in\mathscr{K}(X)-\{\varnothing\}$, 存在 $(\mathscr{F})_K$ 的有限集 $\{F_i:i\leqslant m\}$ 覆盖 K. 对 $i\leqslant m$, 存在 $n_i\in\mathbb{N}$, 使 $F_i\in\mathscr{F}_{n_i}$, 那么 $K=\bigcup_{i\leqslant m}(K\cap F_i)$ 且 $|(\mathscr{W}_{n_i})_{K\cap F_i}|=1$. 故 $\{\mathscr{W}_n\}$ 满足 (2).

定理 3.8.20[223]　ℵ 空间满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理.

证明　设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 其中 X 是具有 G_δ 对角线的正则空间, Y 是 ℵ 空间.

断言: 存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满

$$对\ K\in\mathscr{K}(X)-\{\varnothing\},\ K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{U}_n)}.$$

由命题 1.4.9, X 具有 G_δ^* 对角线序列 $\{\mathscr{A}_n\}$, 其中 $\mathscr{A}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{A}_n$. 对 $K\in\mathscr{K}(X)-\{\varnothing\}$, 若 $x\in X-K$, 由于 $\{X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{A}_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 覆盖 K, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使 $K\subset X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{A}_k)}$, 那么 $x\notin\mathrm{st}(K,\mathscr{A}_k)$, 因此 $K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(K,\mathscr{A}_n)$. 对 $j\in\mathbb{N}$, 由引理 3.8.19, 存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{B}_{jn}\}$ 具有下列性质:

(20.1) 对 $n\in\mathbb{N}$, $\overline{\mathscr{B}}_{jn}$ 加细 $(\bigwedge_{i,l<j}\mathscr{B}_{il})\wedge(\bigwedge_{k\leqslant j}\mathscr{A}_k)$,

(20.2) $\{\mathscr{B}_{jn}\}_n$ 满足引理 3.8.19(2).

对 $K\in\mathscr{K}(X)-\{\varnothing\}$ 及 $k\in\mathbb{N}$, 取 $j>k$. 由 (20.2), 存在有限的 $\{K_i:i\leqslant m\}\subset\mathscr{K}(X)$, $\{n_i:i\leqslant m\}\subset\mathbb{N}$, 使 $K=\bigcup_{i\leqslant m}K_i$ 且 $|(\mathscr{B}_{jn_i})_{K_i}|=1$, 那么 $\overline{\mathrm{st}(K_i,\mathscr{B}_{jn_i})}\subset\mathrm{st}(K_i,\mathscr{A}_k)$. 取 $h>\max\{j,n_1,n_2,\cdots,n_m\}$. 有

$$K\subset\bigcap_{s,t\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{B}_{st})}\subset\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{B}_{h1})}\subset\bigcup_{i\leqslant m}\overline{\mathrm{st}(K_i,\mathscr{B}_{jn_i})}\subset\mathrm{st}(K,\mathscr{A}_k).$$

从而 $K=\bigcap_{s,t\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{B}_{st})}$. 断言成立.

设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的满足断言的序列. 不妨设 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 由引理 3.8.19, $\mathscr{U}_n$ 有 σ 离散闭加细 $\mathscr{F}_n$, 使 $\mathscr{K}(X)$ 加细 $\mathscr{F}_n^F$. 记 $\mathscr{F}_n=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_{nm}$, 其中 $\mathscr{F}_{nm}$ 是局部有限闭集族且 $\mathscr{F}_{nm}\subset\mathscr{F}_{nm+1}$. 让 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_k$ 是 Y 的 k 网, 其中 $\mathscr{P}_k$ 是局部有限集族且 $\mathscr{P}_k\subset\mathscr{P}_{k+1}$. 定义

$$\mathscr{H}_{nmk}=\mathscr{F}_{nm}\wedge f^{-1}(\mathscr{P}_k),\ n,m,k\in\mathbb{N}.$$

则 $\mathscr{H}_{nmk}$ 是 X 的局部有限集族. 验证 $\bigcup_{n,m,k\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_{nmk}$ 是 X 的 k 网. 若 X 的非空紧集 $K\subset U\in\tau(X)$, 那么 $\{U\}\cup\{X-\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{U}_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 覆盖了 $f^{-1}f(K)$, 于是存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $f^{-1}f(K)\subset U\cup(X-\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{U}_n)})$, 所以 $\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{U}_n)}\cap f^{-1}f(K)\subset U$, 从而 $(f^{-1}f(K)-U)\cap\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{U}_n)}=\varnothing$, 因此存在 $V\in\tau(X)$, 使 $f^{-1}f(K)-U\subset V$ 且 $V\cap\overline{\mathrm{st}(K,\mathscr{U}_n)}=\varnothing$. 故 $f(K)\subset Y-f(X-(U\cup V))$, 所以存在 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\mathscr{P}'\in\mathscr{P}_k^{<\omega}$, 使 $f(K)\subset\cup\mathscr{P}'\subset Y-f(X-(U\cup V))$. 这时 $f^{-1}f(K)\subset\cup f^{-1}(\mathscr{P}')\subset U\cup V$.

由 $\mathscr{F}_n$ 的性质, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{F}' \in \mathscr{F}_{nm}^{<\omega}$, 使 $K \subset \cup\mathscr{F}' \subset \mathrm{st}(K, \mathscr{U}_n)$, 那么 $K \subset \cup(\mathscr{F}' \wedge f^{-1}(\mathscr{P}')) \subset U$. 故 X 是 $\aleph$ 空间.

推论 3.8.21[267]　$\aleph_0$ 空间满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理.

例 3.8.22　$\aleph$ 空间类.

(1) Lašnev 空间 $\not\Rightarrow$ $\aleph$ 空间, 如扇空间 S_{ω_1} (例 1.8.7).

(2) $\aleph$ 空间 $\not\Rightarrow$ 具有 σ-HCP 伪基, 如实数空间 $\mathbb{R}$ 的不可数拓扑和.

(3) 可分, 具有 σ-HCP 伪基 $\not\Rightarrow$ 正规性, 如例 3.4.18(2) 的空间 X. 由定理 3.8.1, X 具有 σ-HCP 伪基.

例 3.8.23　$\aleph$ 空间类与映射.

(1) 开映射不保持 $\aleph_0$ 空间 [280]: 蝶形空间 (例 1.8.3) 可表为 $\aleph_0$ 空间的开映象.

让 X 是蝶形空间, 其中 $A = \mathbb{R} \times \{0\}$. 再让 $M = \mathbb{N} \cup \{p\}$ 是 Michael 空间 (例 1.8.8). 定义

$$Z = ((X - A) \times \mathbb{N}) \cup (A \times \{p\}) \subset X \times M.$$

取映射 $f = \pi_{1|Z} : Z \to X$.

(23.1) f 是开映射. 对 $V \in \tau(X \times M)$, 由于 $\mathbb{N}$ 是 M 的稠集, 所以对 $B \in \tau(X)$, 有 $\pi_1(V \cap (B \times \mathbb{N})) = \pi_1(V \cap (B \times M))$. 考虑 $B = X - A$, 则

$$\begin{aligned}\pi_1(V \cap Z) &= \pi_1(V \cap ((X - A) \times \mathbb{N})) \cup \pi_1(V \cap (A \times \{p\})) \\ &= \pi_1(V \cap ((X - A) \times M)) \cup \pi_1(V \cap (A \times \{p\})) \\ &= \pi_1(V \cap ((X - A) \times M)) \cup \pi_1(V \cap (X \times \{p\})).\end{aligned}$$

由于 $\pi_{1|X \times \{p\}}$ 是开映射, 所以 $f(V \cap Z) \in \tau(X)$. 故 f 是开映射.

(23.2) Z 是 $\aleph_0$ 空间. 显然, Z 是正则空间. 由于 $(X - A) \times \mathbb{N}$ 和 $A \times \{p\}$ 都是可分度量空间, 为证 Z 是 $\aleph_0$ 空间, 只须证对 $K \in \mathscr{K}(Z)$, 若令

$$K_1 = K \cap ((X - A) \times \mathbb{N}),\ K_2 = K \cap (A \times \{p\}),$$

则 $K_1, K_2 \in \mathscr{K}(Z)$. 由于 $\pi_2(K)$ 是有限集, 于是 $\pi_2(K) \cap \mathbb{N}$ 是 M 的闭集, 从而 $K_1 = K \cap \pi_2^{-1}(\pi_2(K) \cap \mathbb{N}) \in \mathscr{K}(Z)$. 因为 $A \times \{p\}$ 是 Z 的闭集, 所以 $K_2 \in \mathscr{K}(Z)$.

(2) 具有 σ-HCP 伪基性质不满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理.

对 $\alpha < \omega_1$, 设 I_α 同胚与 $\mathbb{I}$. 让 $X = \bigoplus_{\alpha<\omega_1} I_\alpha, Y = \omega_1$, 并且赋予 Y 离散拓扑. 定义 $f : X \to Y$, 使 $f(I_\alpha) = \{\alpha\}$. 那么 f 是逆紧映射, X 具有 G_δ 对角线, 且 Y 具有 σ-HCP 伪基. 然而, X 不具有 σ- HCP 伪基.

问题 3.8.24　具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间是否是 $\aleph$ 空间的闭映象?

3.9　g 可度量空间

按照研究广义度量空间的基本问题, 对 g 可度量空间, 感兴趣它与具有 σ 离散

弱基的正则空间, 具有 σ-HCP 弱基的正则空间的关系. Tanaka[378] 曾提出问题: 具有 σ-HCP 弱基的正则空间是否是 g 可度量空间? 本节先介绍这一问题的肯定回答及相关结果, 其次讨论 g 可度量空间的映射定理.

由弱基的定义, 下述引理是显然的.

引理 3.9.1 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$ 是空间 X 的弱基. 若 a 是 X 的唯一聚点, 则 $\mathscr{P}_a$ 是 a 的局部基.

引理 3.9.2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数弱遗传闭包保持集族. 如果 $\mathscr{P}$ 是 X 中某非平凡收敛序列极限点的序列邻域族, 则 $\mathscr{P}$ 是有限的.

证明 设 X 中非平凡的序列 S 收敛于 x 且 $\mathscr{P}$ 是 x 的序列邻域族. 如果 $\mathscr{P}$ 含无限集列 $\{P_n\}$, 则 S 终于每一 P_n, 所以存在 S 的子列 $\{x_n\}$, 使 $x_n\in P_n$, 从而 $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是闭离散集, 矛盾. 故 $\mathscr{P}$ 是有限的.

定理 3.9.3 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 g 可度量空间;

(2) X 具有 σ 离散弱基 [109];

(3) X 具有 σ 遗传闭包保持弱基 [256];

(4) X 是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 g 第一可数空间 [230, 378].

证明 (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3) 是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (4). 由推论 1.6.20 和引理 3.8.3, 只须证具有 σ-HCP 弱基的空间是 g 第一可数空间. 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的弱基, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 HCP. 记 $\mathscr{P}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{B}_x$, 其中 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的弱基. 固定 $x\in X$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{P}'_n=\mathscr{P}_n\cap\mathscr{B}_x$.

不妨设 x 是 X 的聚点. 则 x 是 X 中某一非平凡收敛序列的极限. 事实上, 取定 X 的开集列 $\{V_n\}$ 满足: $\overline{V}_{n+1}\subset V_n$ 且 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$. 对 $P\in\mathscr{P}'_n$, x 是 P 的聚点, 存在 $x(P,n)\in(P-\{x\})\cap V_n$. 令 $Y=\{x\}\cup\{x(P,n):P\in\mathscr{P}'_n,n\in\mathbb{N}\}$. 则 Y 是 X 的闭集, 从而 Y 具有 σ-HCP 弱基且 x 是 Y 的唯一聚点. 由引理 3.9.1, Y 具有 σ-HCP 基. 再由 Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理, Y 是可度量子空间, 故存在 Y 中非平凡的序列收敛于 x.

由推论 1.6.19 和引理 3.9.2, $\mathscr{P}'_n$ 是有限的. 从而 $\mathscr{B}_x$ 是可数的. 故 X 是 g 第一可数空间.

(4) $\Rightarrow$ (2). 由推论 1.6.18, S_{ω_1} 不是 g 第一可数空间. 再由定理 3.8.8, 3.8.4 和命题 1.6.21, X 具有 σ 离散弱基.

由 Lašnev 空间的度量化定理 (见定理 2.5.17), 可产生 g 可度量空间的度量化定理.

推论 3.9.4[351] X 是可度量空间当且仅当 X 是 Fréchet 的 g 可度量空间.

问题 3.9.5[108] 具有 σ 局部有限闭弱基的空间是否是正则空间?

引理 3.9.6[237] 设正则空间 X 具有点可数 cs^* 网. X 是 g 第一可数空间当且仅当 X 是不含闭子空间同胚于 S_ω 的序列空间.

证明 只须证充分性. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的点可数 cs^* 网. 对 $x \in X$, 置

$$\mathscr{B}_x = \{\cup\mathscr{P}' : \mathscr{P}' \in (\mathscr{P})_x^{<\omega}, \cup\mathscr{P}' \text{ 是 } x \text{ 的序列邻域}\}.$$

则 $\mathscr{B}_x$ 是可数的. 下面证明 $\mathscr{B} = \bigcup_{x\in X}\mathscr{B}_x$ 是 X 的弱基.

设 $G \subset X$, 且对 $x \in G$, 存在 $B \in \mathscr{B}_x$, 使 $B \subset G$. 那么 G 是其中每一点的序列邻域, 于是 G 是序列开集. 因为 X 是序列空间, 所以 $G \in \tau$.

另一方面, 设 $G \in \tau$, 且存在 $x \in G$, 使 $\mathscr{B}_x$ 的任何元不含于 G 内. 置

$$\mathscr{P}^* = \{P \in (\mathscr{P})_x : P \subset G\} = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

对 $n \in \mathbb{N}$, 令 $F_n = \bigcup_{i\leqslant n} P_i$. 则 F_n 不是 x 的序列邻域. 因为 $\mathscr{P}$ 是 cs^* 网, 对 $i \in \mathbb{N}$, 存在 X 中收敛于 x 的序列 T_i' 和 $n_i \in \mathbb{N}$, 使 $T_i' \subset P_{n_{i+1}} - F_{n_i}$ 且 $n_i < n_{i+1}$. 令

$$\mathscr{Q} = \{P \in \mathscr{P} : x \notin \overline{P} \text{ 且存在 } i \in \mathbb{N}, \text{使 } P \cap T_i' \neq \varnothing\} = \{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

对 $i \in \mathbb{N}$, 存在 T_i' 的子列 $T_i \subset X - \bigcup_{k\leqslant i}\overline{Q}_k$. 这时, $\overline{Q}_k \subset X - \bigcup_{i\geqslant k} T_i$. 再令

$$T = \{x\} \cup (\cup\{T_i : i \in \mathbb{N}\}).$$

则不存在 T 中非平凡的序列 $\{x_k\}$ 收敛于某 $x' \in X$ 且不同的 x_k 属于不同的 T_i. 事实上, 若 $x' = x$, 存在 $i \in \mathbb{N}$, 使 P_i 含 $\{x_k\}$ 的子序列 $\{x_{k_m}\}$, 从而存在 $m, j \in \mathbb{N}$, 使 $j \geqslant i$ 且 $x_{k_m} \in T_j$, 因而 $x_{k_m} \in P_i \cap (X - F_{n_j}) = \varnothing$, 矛盾. 若 $x' \neq x$, 则存在 $Q \in \mathscr{Q}$, 使 Q 含 $\{x_k\}$ 的无限项, 这与 T_i 的选取相矛盾. 因为 X 是序列空间, 所以 T 既是 X 的闭子空间又同胚于 S_ω, 矛盾.

综上所述, X 是 g 第一可数空间.

定理 3.9.7[258] 正则空间 X 是 g 可度量空间当且仅当 X 是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 k 空间, 且不含闭子空间同胚于 S_ω.

证明 只须证充分性. 由于 X 不含闭子空间同胚于 S_ω, 所以 X 必不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 由定理 3.8.8, X 是 $\aleph$ 空间. 再由引理 3.9.6 和定理 3.9.3, X 是 g 可度量空间.

问题 3.9.8[252] 具有 σ 紧有限弱基的正则空间是否是 g 可度量空间?

定理 3.9.9[248] 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 紧有限弱基;

(2) X 是具有 σ 弱遗传闭包保持弱基的 k 空间;

(3) X 是具有 σ 弱遗传闭包保持弱基的 g 第一可数空间.

证明 (1) ⇒ (2). 只须注意到, k 空间的紧有限集族是弱遗传闭包保持的.

下面证明 (2) ⇒ (3) ⇒ (1). 记 X 的孤立点集为 $\mathbf{I}$.

设 X 是具有 σ 弱遗传闭包保持弱基的 k 空间. 由引理 2.5.10, X 有 σ 紧有限网, 所以 X 的紧集是可度量的, 从而 X 是序列空间, 于是 X 的聚点是 X 中某非平凡收敛序列的极限点. 由引理 3.9.2, X 是 g 第一可数空间.

设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 g 第一可数空间 X 的弱基, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是弱遗传闭包保持的且 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 对 $x\in X$, 置 $\mathscr{H}_x=\{P\in\mathscr{P}:P$ 是 x 的序列邻域$\}$. 如果 $x\in\mathbf{I}$, 则 $\{x\}\in\mathscr{P}$, 所以 $\mathbf{I}$ 是 X 的 σ 闭离散子空间. 对 $n\in\mathbb{N},P\in\mathscr{P}_n$, 令

$$D_n=\{x\in X:|(\mathscr{P}_n)_x|\geqslant\aleph_0\},$$
$$W_n(P)=(P-D_n)\cup\{x\in X-\mathbf{I}:P\in\mathscr{H}_x\}.$$

则 $W_n(P)\subset P$. 如果 $x\in X-\mathbf{I},P\in\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_n$, 则 $W_n(P)$ 是 x 的序列邻域. 事实上, 设序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x. 则 $\{x_i\}$ 终于 P, 由引理 2.5.10, $(\{x_i:i\in\mathbb{N}\}\cup\{x\})\cap D_n$ 是有限的, 所以 $\{x_i\}$ 终于 $(P-D_n)\cup\{x\}\subset W_n(P)$, 因此 $W_n(P)$ 是 x 的序列邻域. 再令

$$\mathscr{W}_n=\{W_n(P):P\in\mathscr{P}_n\}.$$

则 $\mathscr{W}_n$ 是点有限的. 事实上, 对 $x\in X$, 由 $\{P-D_n:P\in\mathscr{P}_n\}$ 的点有限性, 不妨设 $x\in X-\mathbf{I}$. 由引理 3.9.2, $\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_n$ 是有限的, 于是 $\mathscr{W}_n$ 是点有限的. 从而 $\mathscr{W}_n$ 是点有限和弱遗传闭包保持的集族. 再由引理 2.5.10, $\mathscr{W}_n$ 是紧有限的.

对 $x\in X$, 如果 $x\in\mathbf{I}$, 取 $\mathscr{B}_x=\{\{x\}\}$; 如果 $x\in X-\mathbf{I}$, 取 $\mathscr{B}_x=\{W_n(P):n\in\mathbb{N},P\in\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_n\}$. 则 $\bigcup_{x\in X}\mathscr{B}_x$ 是 X 的弱基. 首先, 对 $x\in X-\mathbf{I}$ 和 $U,V\in\mathscr{B}_x$, 存在 $n,m\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_n$, $Q\in\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_m$, 使 $U=W_n(P),V=W_m(Q)$, 从而存在 $k\geqslant\max\{n,m\}$ 和 $R\in\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_k$, 使 $R\subset P\cap Q$, 所以 $W_k(R)\subset W_n(P)\cap W_m(Q)$. 其次, 对 $x\in G\in\tau$, 不妨设 $x\in X-\mathbf{I}$. 那么存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_n$, 使 $P\subset G$, 于是 $x\in W_n(P)\subset P\subset G$. 再次, 设 $G\subset X$, 满足对 $x\in G$ 有某一 $B\in\mathscr{B}_x$, 使 $B\subset G$. 则 G 是其每一点的序列邻域, 那么 G 是序列开集, 所以 $G\in\tau$. 故 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的弱基.

综上所述, $\bigcup_{x\in X}\mathscr{B}_x$ 是 X 的 σ 紧有限弱基.

推论 3.9.10[248] 具有 σ 弱遗传闭包保持弱基的 $\aleph_1$ 紧空间具有可数弱基.

证明 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 $\aleph_1$ 紧空间 X 的弱基, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是弱遗传闭包保持的. 记 X 的孤立点集为 $\mathbf{I}$. 对 $x\in X-\mathbf{I}$, 让 $\mathscr{H}_x=\{P\in\mathscr{P}:P$ 是 x 的序列邻域$\}$. 如果存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_n$ 的不可数集 $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, 因为 $X-\{x\}$ 不是 X 的闭集, 则对 $\alpha<\omega_1$ 和 x 的开邻域 U, 有 $P_\alpha\cap U\cap(X-\{x\})\neq\varnothing$. 由归纳法, 存在 X 的子集 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$, 使 $x_\alpha\in P_\alpha\cap(X-\{x_\beta:\beta<\alpha\})\cap(X-\{x\})$, 那么 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 X 的不可数闭离散集, 矛盾. 从而 $\mathscr{H}_x\cap\mathscr{P}_n$ 是可数的. 故 X 是 g 第一可数空间.

由定理 3.9.9, X 具有 σ 紧有限弱基. 由引理 3.2.13, X 的点有限且弱遗传闭包保持集族是可数的, 所以 X 具有可数弱基.

下面, 用覆盖列刻画 g 可度量空间. 依照定义 2.10.4, 可类似定义局部有限弱展开、遗传闭包保持弱展开和闭包保持弱展开的概念.

定理 3.9.11[244]　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 g 可度量空间;

(2) X 有局部有限弱展开;

(3) X 有遗传闭包保持弱展开.

证明　只须证 (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2).

设 X 具有 HCP 覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的弱展开. 对 X 的序列 $\{x_n\}$, 设 $x_n \to x \in V \in \tau(X)$. 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \subset V$. 由推论 1.6.19, 存在 $i \geqslant m$, 使 $\{x_n : n \geqslant i\} \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m)$. 再由引理 2.5.4, 存在 $\mathscr{U}' \in (\mathscr{U}_m)_x^{<\omega}$, 使 $\{x_n : n \geqslant i\} \subset \cup\mathscr{U}'$, 于是存在 $U \in \mathscr{U}_m$ 及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}$, 使 $\{x\} \cup \{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\} \subset U \subset V$. 故 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ 是 X 的 cs^* 网. 由引理 3.8.3 和定理 3.9.3, X 是 g 可度量空间.

设 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 g 可度量空间 X 的弱基, 其中 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的离散闭集族. 记 $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{B}_x$, 其中 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的弱基. 对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$U_n = \{x \in X : \mathscr{B}_x \cap \mathscr{P}_n = \varnothing\},$$
$$\mathscr{U}_n = \{U_n\} \cup \mathscr{P}_n.$$

则 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的局部有限覆盖. 注意到, 若 $\mathscr{B}_x \cap \mathscr{P}_n = \varnothing$, 那么

$$x \in X - \cup\{P \in \mathscr{P}_n : x \notin P\} \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n),$$

于是 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 总是 x 的弱邻域. 从而 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的弱展开.

问题 3.9.12　具有闭包保持弱展开的正则空间是否是 g 可度量空间?

利用 σ 映射, 可获得 g 可度量空间的映射刻画.

定理 3.9.13　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 g 可度量空间;

(2) X 是度量空间的商, π 且 σ 映象 [216];

(3) X 是度量空间的商, 紧且 σ 映象;

(4) X 是度量空间的紧覆盖, 商, 紧且 σ 映象 [250].

证明　(1) $\Rightarrow$ (4). 设 X 是 g 可度量空间. 由定理 3.9.11 中 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明及记号, X 有局部有限的弱展开 $\{\mathscr{U}_n\}$. 对 $n \in \mathbb{N}, K \in \mathscr{K}(X)$, 让 $\Gamma_n = \{\alpha : P_\alpha \in \mathscr{P}_n, P_\alpha \cap K \neq \varnothing\}$. 则 Γ_n 是有限集. 对 $\alpha \in \Gamma_n$, 置 $K_\alpha = P_\alpha \cap K$, $K_n = \overline{K - \bigcup_{\alpha\in\Gamma_n} K_\alpha}$. 那么 $\{K_\alpha : \alpha \in \Gamma_n\} \cup \{K_n\}$ 是 K 的闭覆盖. 对 $x \in K_n$, 存在 $K - \bigcup_{\alpha\in\Gamma_n} K_\alpha$ 的序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x. 如果存在 $P \in \mathscr{B}_x \cap \mathscr{P}_n$, 则 P 是 x 的弱

邻域, 于是存在 $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \Gamma_n$, 使 $x_m \in P \cap K_\alpha$, 矛盾. 故 $\mathscr{B}_x \cap \mathscr{P}_n = \varnothing$, 所以 $x \in U_n$, 从而 $K_n \subset U_n$. 因此 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的 cfp 覆盖.

对 $i \in \mathbb{N}$, 记 $\mathscr{U}_i = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda_i\}$. 采用命题 2.9.6 的记号, 可定义度量空间 M 和紧覆盖的 π 映射 $f : (M, d) \to X$. 由定理 2.10.6, f 是商, 紧映射. 下面证明 f 是 σ 映射. 对 $(\alpha_i) \in M, n \in \mathbb{N}$, 置 $B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \{(\gamma_i) \in M : \gamma_i = \alpha_i, i \leqslant n\}$. 则 $f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = \bigcap_{i \leqslant n} U_{\alpha_i}$. 事实上, 显然, $f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \subset \bigcap_{i \leqslant n} U_{\alpha_i}$. 让 $z \in \bigcap_{i \leqslant n} U_{\alpha_i}$. 存在 $\beta' = (\beta'_i) \in M$, 使得 $f(\beta') = z$. 对 $k \in \mathbb{N}$, 若 $k \leqslant n$, 令 $\beta_k = \alpha_k$; 若 $k > n$, 令 $\beta_k = \beta'_k$. 则 $z \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_{\beta_k}$. 置 $\beta = (\beta_k)$. 那么 $\beta \in M$ 且 $f(\beta) = z$, 从而 $z \in f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$. 这表明 $f(B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = \bigcap_{i \leqslant n} U_{\alpha_i}$. 因为 $\{B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) : (\alpha_i) \in M, n \in \mathbb{N}\}$ 是 M 的基且 $\bigwedge_{i \leqslant n} \mathscr{U}_i$ 是局部有限的, 所以 f 是 σ 映射.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 $f : M \to X$ 是商, π 且 σ 映射, 其中 M 是度量空间. 由映射引理和定理 2.11.12, X 是 $\aleph$ 空间. 由定理 2.9.10, X 是 g 第一可数空间. 再由定理 3.9.3, X 是 g 可度量空间.

问题 3.9.14 g 可度量空间是可度量空间的商有限到一映象吗?

由例 3.1.16, 逆紧映射未必保持 g 可度量空间. 由命题 3.8.15 和定理 3.9.7, 有下述 g 可度量空间的映射定理.

定理 3.9.15 设 $f : X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是 g 可度量空间, Y 是正则空间. 下述条件等价:

(1) Y 是 g 可度量空间;

(2) Y 是 g 第一可数空间 [230, 378];

(3) Y 不含闭子空间同胚于 S_ω[258].

定理 3.9.16[244] g 可度量性满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理.

证明 设 $f : X \to Y$ 是逆紧映射, 其中 X 是具有 G_δ 对角线的正则空间, Y 是 g 可度量空间. 由定理 3.8.20, X 是 $\aleph$ 空间. 如果 X 不是 g 可度量空间, 由定理 3.9.7, X 含闭子空间 T 同胚于 S_ω. 令 $h = f_{|T} : T \to f(T)$. 则 h 是逆紧映射, 于是 $f(T)$ 是 Y 的 Fréchet 的闭子空间. 由推论 3.9.4, $f(T)$ 是可度量空间. 再由定理 2.2.12, T 是可度量空间, 矛盾. 因此, X 是 g 可度量空间.

例 3.9.17 g 可度量空间类.

(1) 点可数 cs 网, 不含闭子空间同胚于 S_ω, k 空间 $\not\Rightarrow$ 序列空间, 如紧化 $\beta\mathbb{N}$.

(2) 不含闭子空间同胚于 S_ω, $\aleph_0$ 空间 $\not\Rightarrow$ k 空间, 如 Michael 空间 (例 1.8.8).

(3) σ 弱遗传闭包保持弱基 $\not\Rightarrow$ k 空间, 如例 2.5.18 中的空间 X.

3.10 某些尚未解决的问题

本节将以上各章节提到的问题集中, 供有兴趣的读者研究①. 为方便查对, 问题仍使用原序号.

问题 1.7.8[66] 具有点可数基的 wΔ 空间是否是可展空间?

问题 1.7.9[107] 拟可展的 β 空间是否是可展空间?

问题 1.7.10[175] 具有 G_δ 对角线的 wM 空间是否是可度量空间?

问题 1.8.16[283] 是否存在正则遗传 Lindelöf 的半度量空间 X, 使 X^2 不是正规空间?

问题 1.8.17[140] 是否存在非 σ 空间的正则遗传 Lindelöf 的半度量空间?

问题 2.1.17[290] 特征空间 Y, 使每一满的闭映射 $f: X \to Y$ 是可数双商映射.

问题 2.1.18[381] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 空间 X 或 Y 附加什么条件, 对每一 $y \in Y, \partial f^{-1}(y)$ 具有较好性质?

问题 2.2.21[140] 正规 Moore 空间是否是次可度量空间?

问题 2.4.6[386] 第一可数的连通空间是否是连通度量空间的开映象?

问题 2.4.16[341] (Olson R C) 具有点可数基空间到具有点可数型空间的商 L 映射是否是可数双商映射?

问题 2.5.20[260] 具有 σ 弱遗传闭包保持基的空间是否具有点 G_δ 性质?

问题 2.5.21[262] 具有 σ 紧有限 k 网的正则的 k 空间是否是亚 Lindelöf空间?

问题 2.5.25[370] 寻求可数个 Lašnev 空间乘积的子空间的内在刻画?

问题 2.6.5 用度量空间的映象刻画性质: 每一紧集是可度量的第一可数空间.

问题 2.9.17 (1) 半度量空间是否是某一度量空间的序列覆盖的 π 映象?

(2) 半度量空间是否是某一度量空间的紧覆盖的 π 映象?

问题 2.10.10 可分度量空间的商 π 映象是否是某一可分度量空间的商紧映象?

问题 2.10.11[173] 具有 σ 点有限 cs 网的对称度量空间是否是度量空间的商紧映象?

问题 2.10.18[24] 逆紧映射是否保持 MOBI 类?

问题 2.10.19[85] 具有点可数基的空间是否属于 MOBI_2 类?

---

①本书第 1 版中已解决的问题如下: 问题 1.6.20 (见例 1.6.23), 问题 2.7.7(1) (见例 3.1.22), 问题 2.7.20 (见推论 2.7.19 后的说明), 问题 3.1.16 (见例 3.1.20) , 问题 3.2.29 (见定理 3.2.22), 问题 3.4.1(5) (见命题 3.5.18), 问题 3.8.3 (见定理 3.9.3).

问题 3.1.5　(1) 具有点可数 p 亚基的 β 空间是否是半层空间?

(2) 具有点可数基的 β 空间是否是半层空间?

(3) 具有点可数基的集态正规的 β 空间是否是可度量空间 [38]?

问题 3.1.18[71]　逆紧映射是否保持具有点可数 p 基的空间?

问题 3.1.19[143]　逆紧映射或伪开 s 映射是否保持度量空间的伪开 s 映象?

问题 3.1.21[345]　任一空间是否可表为具有点可数 k 网空间的闭映象?

问题 3.1.23[261]　具有点可数 k 网的正则 Fréchet 空间是否具有紧可数 k 网?

问题 3.2.4　具有下述性质的空间 X 是否是 $\Sigma^\sharp$ 空间? X 有闭包保持的闭覆盖列 $\{\mathscr{F}_n\}$ 满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \in C(\mathscr{F}_n, x)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

问题 3.2.7　具有 σ 垫状 (mod$k$) 网的空间是否是次亚紧空间?

问题 3.2.11[372]　Σ 空间是否具有 σ 离散的闭拟 (mod$k$) 网?

问题 3.2.23[324]　perfect 的 $\Sigma^\sharp$ 空间是否是 Σ 空间?

问题 3.2.32　(1) 强 Σ^* 空间是否满足 Lindelöf 型分解定理 [332]?

(2) perfect 的强 Σ 空间是否满足紧型分解定理 [84]?

问题 3.2.34　(1) 设 $X \times \mathbb{I}$ 是强 Σ^* 空间, 那么 X 是否是强 Σ 空间?

(2) Σ 空间性质是否是有限可积性?

问题 3.3.8[296]　亚紧 σ 空间是否具有一致 (G)?

问题 3.3.13[84]　σ 空间的逆紧逆象是否满足紧型分解定理?

问题 3.3.19　(1) 可数仿紧半层空间的逆可数紧逆象是否满足可数紧型分解定理[140]?

(2) 正则半层空间是否满足紧型分解定理?

问题 3.3.22[94, 71]　Fréchet 的半层空间是否可表为半度量空间的闭映象?

问题 3.3.23[379]　设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 如果 X 是对称度量空间, Y 是 g 第一可数空间, 那么 Y 是否是对称度量空间?

问题 3.4.2[121]　k 半层空间是否具有 σ 闭包保持 k 网?

问题 3.4.5　具有点可数弱基, 或 σ 局部可数弱基的 k 半层空间是否是 g 可度量空间?

问题 3.4.17　k 半层空间是否满足逆紧逆象 G_δ 对角线定理?

问题 3.4.20　正规的 k, σ 空间是否是仿紧空间?

问题 3.4.21　具有星可数 k 网的正则的 k 空间是否是 k 半层空间?

问题 3.4.22　k 半层空间的正则的伪开紧映象是否是 σ 空间?

问题 3.5.1　Ceder 问题 [79].

(1) M_2 空间是否是 M_1 空间?

(5) M_1 空间是否具有闭遗传性?

(6) 闭映射或逆紧映射是否保持 M_1 空间?

问题 3.5.21[254]　设 X 是 Fréchet 的层空间. 若 X 具有点可数 k 网, X 是否是 Lašnev 空间?

问题 3.6.6[293]　用 σ 遗传闭包保持的对网刻画可展空间的闭映象.

问题 3.6.8[91]　满足开 (G) 的空间是否具有点可数基?

问题 3.6.13[71]　逆紧映射是否保持 wΔ 空间?

问题 3.6.16[84]　Moore 空间的逆紧逆象是否满足紧型分解定理?

问题 3.6.19[382]　Moore 空间的有限到一的伪开映象是否是可展空间?

问题 3.7.8　(1) $M^\sharp$ 空间是否是 M^* 空间 [306]?

(2) 正规 wM 空间是否是 M 空间 [175]?

(3) wM 空间是否是 $M^\sharp$ 空间?

问题 3.8.12[319]　定义适当的基以刻画 $\aleph$ 空间.

问题 3.8.14　$\aleph_0$ 空间的正则的开紧映象是否是 $\aleph_0$ 空间?

问题 3.8.24　具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间是否是 $\aleph$ 空间的闭映象?

问题 3.9.5[108]　具有 σ 局部有限闭弱基的空间是否是正则空间?

问题 3.9.8[252]　具有 σ 紧有限弱基的正则空间是否是 g 可度量空间?

问题 3.9.12　具有闭包保持弱展开的正则空间是否是 g 可度量空间?

问题 3.9.14　g 可度量空间是可度量空间的商有限到一映象吗?

附录 A　某些覆盖性质的刻画

这是为了方便正文的阅读而准备的附录, 主要介绍正文中使用的五种覆盖性质: 仿紧性、亚紧性、次仿紧性、次亚紧性以及亚 Lindelöf 性的一些刻画和相关的映射定理. 关于覆盖性质的系统介绍, 推荐阅读 Burke 的 “Covering Properties”[72], 或蒋继光的《一般拓扑学专题选讲》[184].

本附录约定: 不预先假设空间满足任何分离性公理, 映射指连续的满函数. 先回忆一些基本的术语. 设 X 是拓扑空间, 并且 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ 是 X 的覆盖. $\mathscr{U}$ 称为 X 的良序覆盖, 如果对 $\alpha<\beta<\gamma$, 有 $U_\alpha\subset U_\beta$. $\mathscr{U}$ 称为 X 的定向覆盖, 如果对 $\alpha,\beta<\gamma$, 存在 $\delta<\gamma$, 使 $U_\alpha\cup U_\beta\subset U_\delta$. 对 X 的集族 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$, 称 $\mathscr{V}$ 部分加细 $\mathscr{W}$, 如果对 $V\in\mathscr{V}$, 有 $W\in\mathscr{W}$, 使 $V\subset W$. 称 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{W}$, 如果 $\mathscr{V}$ 覆盖 X 且 $\mathscr{V}$ 部分加细 $\mathscr{W}$. 其他一些常用的记号及术语见正文 § 1.1.

A.1　仿 紧 空 间

定义 A.1.1　X 称为仿紧空间 [95], 若 X 的每一开覆盖存在局部有限的开加细. X 称为可数仿紧空间 [98, 196], 若 X 的每一可数开覆盖存在局部有限的开加细.

仿紧空间的 Michael 特征是众所周知的.

定理 A.1.2[274, 275, 276]　对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖存在星形开加细;

(3) X 的每一开覆盖存在 σ 离散开加细;

(4) X 的每一开覆盖存在 σ 垫状开加细;

(5) X 的每一开覆盖存在闭包保持闭加细.

推论 A.1.3[275] (Michael 定理)　闭映射保持 T_2 仿紧性.

命题 A.1.4[148]　仿紧空间的逆紧逆象是仿紧空间.

证明　设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 其中 Y 是仿紧空间. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 若 $y\in Y$, 则存在 $\mathscr{U}_y\in\mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $f^{-1}(y)\subset\cup\mathscr{U}_y$. 取 y 的开邻域 V_y, 使 $f^{-1}(V_y)\subset\cup\mathscr{U}_y$. 这时 Y 的开覆盖 $\{V_y:y\in Y\}$ 存在局部有限的开加细

$\{W_y : y \in Y\}$, 使 $W_y \subset V_y$. 从而 $\{f^{-1}(W_y) \cap U : y \in Y, U \in \mathscr{U}_y\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细. 故 X 是仿紧空间.

定义 A.1.5 设 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ 是 X 的覆盖. $\mathscr{V}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的局部星形加细 [191], 若对 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 G 和 $U \in \mathscr{U}$, 使 $\mathrm{st}(G, \mathscr{V}) \subset U$. $\mathscr{V}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的点态 W 加细 [398], 若对 $x \in X$, 存在 $\mathscr{U}' \in \mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{V})_x$ 部分加细 $\mathscr{U}'$. $\mathscr{V}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的局部 W 加细 [399], 若对 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 G 和 $\mathscr{U}' \in \mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{V})_G$ 部分加细 $\mathscr{U}'$.

引理 A.1.6[191] 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 考虑下述条件:

(1) $\mathscr{U}^F$ 有闭包保持的闭加细 $\mathscr{F}$, 使 $\mathscr{F}^\circ$ 覆盖 X;

(2) $\mathscr{U}^F$ 有内部保持的局部星形开加细;

(3) $\mathscr{U}^F$ 有内部保持的局部 W 开加细.

那么 (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的内部保持开覆盖, 那么 (1) $\Rightarrow$ (3).

证明 (3) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}^F$ 的内部保持的局部星形开加细. 置

$$F(\mathscr{U}') = \{x \in X : \mathrm{st}(x, \mathscr{V}) \subset \cup \mathscr{U}'\}, \mathscr{U}' \in \mathscr{U}^{<\omega};$$
$$\mathscr{F} = \{F(\mathscr{U}') : \mathscr{U}' \in \mathscr{U}^{<\omega}\}.$$

那么 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{U}^F$ 的闭包保持的闭加细且 $\mathscr{F}^\circ$ 覆盖 X.

现在, 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的内部保持的开覆盖. 让 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{U}^F$ 的闭包保持的闭加细, 且 $\mathscr{F}^\circ$ 覆盖 X. 定义

$$W_x = (\cap(\mathscr{U})_x) \cap (X - \cup(\mathscr{F} - (\mathscr{F})_x)), x \in X;$$
$$\mathscr{W} = \{W_x : x \in X\}.$$

则 $\mathscr{W}$ 是 X 的内部保持的开覆盖. 对 $x \in X$, 存在 $F \in \mathscr{F}$, 使 $x \in F^\circ$, 这时有 $\mathscr{U}' \in \mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $F \subset \cup \mathscr{U}'$, 从而 $(\mathscr{W})_{F^\circ}$ 部分加细 $\mathscr{U}'$. 故 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部 W 加细.

引理 A.1.7 若 $\mathscr{F}$ 是可数仿紧空间 X 的 σ 闭包保持闭集族. 如果 $\mathscr{F}^\circ$ 覆盖 X, 则 $\mathscr{F}$ 存在闭包保持的闭加细 $\mathscr{H}$, 使 $\mathscr{H}^\circ$ 覆盖 X.

证明 记 $\mathscr{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是 X 的闭包保持的闭集族. 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $P_n = \cup \mathscr{F}_n^\circ$. 令 $\mathscr{P} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\mathscr{P}$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{R} = \{R_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 对 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $n_\alpha \in \mathbb{N}$, 使 $R_\alpha \subset P_{n_\alpha}$, 置

$$\mathscr{H}_\alpha = \{F \cap \overline{R}_\alpha : F \in \mathscr{F}_{n_\alpha}\},$$
$$\mathscr{H} = \cup\{\mathscr{H}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}.$$

则 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{F}$ 的闭包保持的闭加细且 $\mathscr{H}^\circ$ 覆盖 X.

引理 A.1.8[191] 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的开覆盖列. 若每一 $\mathscr{U}_{n+1}$ 是 $\mathscr{U}_n$ 的点态 W 加细 (局部 W 加细), 那么 $\mathscr{U}_1$ 存在 σ 点有限开加细 (σ 局部有限开加细).

证明 记 $\mathscr{U}_1 = \{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$. 对 $U \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{U}_n$, 令

$$\alpha(U)=\min\{\alpha<\gamma:U\subset U_\alpha\}.$$

对 $n>1, U\in\mathscr{U}_n$, 称 $\mathscr{U}_{n-1}$ 具有性质 $\Phi(U)$, 如果 $U\subset U'\in\mathscr{U}_{n-1}$, 则 $\alpha(U')=\alpha(U)$. 定义

$$\mathscr{W}_n=\{U\in\mathscr{U}_n:\mathscr{U}_{n-1}\text{ 具有性质 }\Phi(U)\}.$$

(8.1) $\bigcup_{n>1}\mathscr{W}_n$ 覆盖 X.

对 $n>1, x\in X$, 定义 $\alpha_n=\sup\{\alpha(U):x\in U\in\mathscr{U}_n\}$. 由于 $\mathscr{U}_{n+1}$ 是 $\mathscr{U}_n$ 的点态 W 加细, 所以 $\alpha_{n+1}\leqslant\alpha_n<\gamma$, 于是有 $\beta<\gamma$ 和 $k\geqslant 3$, 使当 $n\geqslant k-1$ 时, $\alpha_n=\beta$. 因为 $\mathscr{U}_{k+1}$ 是 $\mathscr{U}_k$ 的点态 W 加细, 因而存在 $\mathscr{U}\in(\mathscr{U}_k)_x^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{U}_{k+1})_x$ 部分加细 $\mathscr{U}$. 选取 $U\in\mathscr{U}$, 使当 $U'\in\mathscr{U}$ 时, $\alpha(U')\leqslant\alpha(U)$. 因为 $(\mathscr{U}_{k+1})_x^{<\omega}$ 部分加细 $\mathscr{U}$, 所以 $\alpha_{k+1}\leqslant\alpha(U)$, 而 $\alpha(U)\leqslant\alpha_k$, 那么 $\alpha(U)=\beta$. 由于 $\alpha_{k-1}=\beta$, 于是 $\mathscr{U}_{k-1}$ 具有性质 $\Phi(U)$: 对 $U'\in(\mathscr{U}_{k-1})_x$, 有 $\alpha(U')\leqslant\beta=\alpha(U)$; 若 $U\subset U'$, 则 $\alpha(U')\geqslant\alpha(U)$, 所以 $\alpha(U')=\alpha(U)$. 这时 $x\in U\in\mathscr{W}_k$.

现在, 对 $n>1$, 定义

$$V_{n\alpha}=\cup\{W\in\mathscr{W}_n:\alpha(U)=\alpha\},\ \alpha<\gamma;$$
$$\mathscr{V}_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\gamma\}.$$

显然, $\bigcup_{n>1}\mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}_1$ 的开加细.

(8.2) $\mathscr{V}_n$ 是 X 的点有限集族 (局部有限集族).

对 $x\in X$, 存在 $G=\{x\}$ (x 的开邻域 G) 及 $\mathscr{U}'\in\mathscr{U}_{n-1}^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{U}_n)_G$ 部分加细 $\mathscr{U}'$. 令

$$\Gamma=\{\alpha(U'):U'\in\mathscr{U}'\},$$
$$\Delta=\{\alpha<\gamma:G\cap V_{n\alpha}\neq\varnothing\}.$$

则 $\Delta\subset\Gamma$. 事实上, 设 $\beta\in\Delta$, 则存在 $U\in\mathscr{W}_n$, 使 $\alpha(U)=\beta$ 且 $U\cap G\neq\varnothing$, 于是 $U\in(\mathscr{U}_n)_G$, 从而存在 $U'\in\mathscr{U}'$, 使 $U\subset U'$, 所以 $\alpha(U)=\alpha(U')$, 因此 $\beta\in\Gamma$. 故 $\mathscr{V}_n$ 是 X 的点有限集族 (局部有限集族).

综上所述, $\bigcup_{n>1}\mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}_1$ 的 σ 点有限开加细 (σ 局部有限开加细).

定理 A.1.9[191, 266]　下述条件等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一良序开覆盖有局部有限开加细;

(3) X 的每一内部保持定向开覆盖有内部保持局部星形开加细;

(4) X 的每一内部保持定向开覆盖有 σ 闭包保持闭加细 $\mathscr{F}$, 使 $\mathscr{F}^\circ$ 覆盖 X;

(5) X 的每一定向开覆盖有闭包保持闭加细 $\mathscr{F}$, 使 $\mathscr{F}^\circ$ 覆盖 X.

证明　(1) ⇒ (5). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的定向开覆盖. 让 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细. 那么 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的内部保持局部 W 开加细. 由引理 1.6, $\mathscr{U}^F$ 有闭包保持闭加细

$\mathscr{F}$, 使 $\mathscr{F}^\circ$ 覆盖 X. 这时 $\mathscr{F}$ 加细 $\mathscr{U}$.

(5) ⇒ (4) 是显然的.

(4) ⇒ (3). 由引理 1.7 和 1.6, 只须证 X 是可数仿紧空间. 设 $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的开覆盖. 那么 X 的内部保持的定向开覆盖 $\{\bigcup_{k \leqslant n} U_k : n \in \mathbb{N}\}$ 有闭加细 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, 使 $\mathscr{F}_n$ 是闭包保持集族且 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n^\circ$ 覆盖 X. 令

$$R_0 = \varnothing;$$
$$R_n = \cup\{F \in \bigcup_{k \leqslant n} \mathscr{F}_k : F \subset \bigcup_{k \leqslant n} U_k\}, n \in \mathbb{N}.$$

那么 $\{U_n - R_{n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细. 故 X 是可数仿紧空间.

(3) ⇒ (2). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的良序开覆盖. 由引理 1.6, X 存在内部保持的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_1 = \mathscr{U}$ 且 $\mathscr{U}_{n+1}$ 是 $\mathscr{U}_n$ 的局部 W 加细. 由引理 1.8, $\mathscr{U}$ 存在开加细 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{V}_n$, 使 $\mathscr{V}_n$ 是 X 的局部有限集族. 由引理 1.6, X 满足 (4), 于是 X 是可数仿紧空间, 从而 $\{\cup \mathscr{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 有局部有限的开加细 $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, 使 $W_n \subset \cup \mathscr{V}_n$, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{W_n \cap V : V \in \mathscr{V}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细.

(2) ⇒ (1). 对基数 γ, 以 $P(\gamma)$ 表示命题: X 的每一基数为 γ 的开覆盖有局部有限的开加细. 假定 γ 是无限基数且对 $\lambda < \gamma$, 有 $P(\lambda)$ 成立. 如果 $\mathscr{U}$ 是 X 的基数为 γ 的开覆盖, 记 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$, 那么 $\{\bigcup_{\beta \leqslant \alpha} U_\beta : \alpha < \gamma\}$ 是 X 的良序开覆盖, 于是它有局部有限的开加细 $\mathscr{W}$. 对 $W \in \mathscr{W}$, 取 $\alpha(W) < \gamma$, 使 $W \subset \cup\{U_\beta : \beta \leqslant \alpha(W)\}$. 对 $\alpha < \gamma$, 令

$$P_\alpha = \cup\{W \in \mathscr{W} : \alpha(W) > \alpha\},$$
$$\mathscr{P}_\alpha = \{P_\alpha\} \cup \{U_\beta : \beta \leqslant \alpha\}.$$

由归纳假设, $\mathscr{P}_\alpha$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{H}_\alpha$. 定义

$$\mathscr{R}(W) = \{W \cap H : H \in \mathscr{H}_{\alpha(W)} \text{ 且对某个 } \alpha \leqslant \alpha(W), \text{ 有 } H \subset U_\alpha\}, W \in \mathscr{W};$$
$$\mathscr{R} = \cup\{\mathscr{R}(W) : W \in \mathscr{W}\}.$$

那么 $\mathscr{R}$ 是 X 的局部有限开集族. 对 $x \in X$, 存在 $W \in (\mathscr{W})_x$, 使对 $W' \in (\mathscr{W})_x$, 有 $\alpha(W') \leqslant \alpha(W)$. 令 $\beta = \alpha(W)$, 取 $H \in \mathscr{H}_\beta$, 使 $x \in H$. 由于 $x \notin P_\beta$ 且 $\mathscr{H}_\beta$ 加细 $\mathscr{P}_\beta$, 所以存在 $\alpha \leqslant \beta$, 使 $H \subset U_\alpha$, 于是 $x \in W \cap H \in \mathscr{R}(W) \subset \mathscr{R}$. 故 $\mathscr{U}$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{R}$, 因此 $P(\gamma)$ 成立.

下面介绍仿紧性与正规性之间的一些关系.

定义 A.1.10 X 称为集态正规空间 [53], 若 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的离散闭集族, 则存在 X 的互不相交的开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 使 $F_\alpha \subset U_\alpha$. X 称为可膨胀空间 [197], 若 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的局部有限闭集族, 则存在 X 的局部有限开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 使 $F_\alpha \subset U_\alpha$.

集态正规性可简述为每一离散闭集族有互不相交的开扩张. 可膨胀性可简述为每一局部有限闭集族有局部有限的开扩张.

定理 A.1.11 T_2 仿紧空间是集态正规空间和可膨胀空间 [197].

证明 设X 是 T_2 仿紧空间. 让$\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散闭集族. 对 $\alpha\in\Lambda$, 令 $V_\alpha=X-\cup(\mathscr{F}-\{F_\alpha\})$. X 的开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 存在星形开加细 $\mathscr{V}$. 再令 $U_\alpha=\mathrm{st}(F_\alpha,\mathscr{V})$. 则 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{F}$ 的互不相交的开扩张. 故 X 是集态正规空间.

让 $\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的局部有限的闭集族. 对 $\Gamma\in\Lambda^{<\omega}$, 令 $V(\Gamma)=X-\cup\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda-\Gamma\}$. 对 $x\in X$, 令 $\Gamma_x=\{\alpha\in\Lambda:x\in F_\alpha\}$. 则 $\Gamma_x\in\Lambda^{<\omega}$ 且 $x\in V(\Gamma_x)$. 让 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖 $\{V(\Gamma):\Gamma\in\Lambda^{<\omega}\}$ 的局部有限开加细. 对 $\alpha\in\Lambda$, 置 $U_\alpha=\mathrm{st}(F_\alpha,\mathscr{V})$. 则 $F_\alpha\subset U_\alpha$. 对 $x\in X$, 存在 x 的开邻域 V 和 $n\in\mathbb{N}$, 使 $(\mathscr{V})_V=\{V_i:i\leqslant n\}$. 对 $i\leqslant n$, 存在 $\Gamma_i\in\Lambda^{<\omega}$, 使 $V_i\subset V(\Gamma_i)$. 令 $\Gamma=\{\alpha\in\Lambda:V\cap U_\alpha\neq\varnothing\}$. 则 $\Gamma\subset\bigcup_{i\leqslant n}\Gamma_i$, 从而 $\Gamma\in\Lambda^{<\omega}$. 因此 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的局部有限的开集族. 故 X 是可膨胀空间.

可膨胀性的证明没使用 T_2 分离性质. 由此, 对可数仿紧空间 X 的局部有限闭集族 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在 X 的局部有限开集族 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $F_n\subset U_n$.

命题 A.1.12 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是集态正规空间 X 的离散闭集族. 则存在 X 的离散开集族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使 $F_\alpha\subset G_\alpha$.

证明 由 X 的集态正规性, 存在 X 的互不相交的开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使 $F_\alpha\subset U_\alpha$. 令 $F=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha, U=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$. 由 X 的正规性, 存在连续函数 $f:X\to\mathbb{I}$, 使 $f(F)\subset\{1\}, f(X-U)\subset\{0\}$. 对 $\alpha\in\Lambda$, 定义 $G_\alpha=U_\alpha\cap\{x\in X:f(x)>1/2\}$. 则 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散开集族且 $F_\alpha\subset G_\alpha$.

命题 A.1.13[177] X 是可数仿紧空间当且仅当对 X 的递增的开覆盖 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在 X 的闭集列 $\{H_n\}$, 使 $H_n\subset G_n$ 且 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n^\circ$.

证明 让 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可数仿紧空间 X 的递增的开覆盖. 存在 X 的局部有限开覆盖 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $V_n\subset G_n$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $H_n=X-\bigcup_{m>n}V_m$. 则闭集 $H_n\subset\bigcup_{m\leqslant n}V_m\subset G_n$. 对 $x\in X$, 存在 x 的开邻域 U_x 仅与有限个 V_n 相交. 设 $k=\max\{n\in\mathbb{N}:U_x\cap V_n\neq\varnothing\}$. 则 $U_x\subset H_k$. 所以 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n^\circ$.

反之, 设 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数开覆盖. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $G_n=\bigcup_{m\leqslant n}U_m$. 则 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的递增开覆盖, 存在闭集列 $\{H_n\}$, 使 $H_n\subset G_n$ 且 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n^\circ$. 令 $V_n=U_n-\bigcup_{m<n}H_m$. 则 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 对 $x\in X$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $x\in H_n^\circ$, 于是当 $m>n$ 时, $H_n^\circ\cap V_m=\varnothing$. 所以 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的. 故 X 是可数仿紧空间.

A.2 亚紧空间

定义 A.2.1 X 称为亚紧空间 (或弱仿紧空间) [16], 若 X 的每一开覆盖有点

有限的开加细. X 称为可数亚紧空间 [135], 若 X 的每一可数开覆盖存在点有限的开加细.

用与命题 1.4 (或引理 1.6) 同样的方法, 可证明命题 2.2 (或引理 2.3).

命题 A.2.2　亚紧空间的逆紧逆象是亚紧空间.

引理 A.2.3　设 $\mathscr{U}$ 是 X 的内部保持的开覆盖. $\mathscr{U}^F$ 有闭包保持的闭加细当且仅当 $\mathscr{U}$ 有内部保持的点态 W 开加细.

定理 A.2.4[191, 346]　下述条件等价:

(1) X 是亚紧空间;

(2) X 的每一良序开覆盖有点有限的开加细;

(3) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}^F$ 有闭包保持的闭加细.

证明　由引理 2.3 得 (1) ⇒ (3). 利用归纳法, 与定理 1.9 中 (2) ⇒ (1) 同样的方法, 只须将 “局部有限” 换为 “点有限” 可证明 (2) ⇒ (1). 下面证明 (3) ⇒ (2).

设 $\mathscr{U}$ 是 X 的良序开覆盖. 由引理 2.3, X 存在内部保持的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_1=\mathscr{U}$ 且 $\mathscr{U}_{n+1}$ 是 $\mathscr{U}_n$ 的点态 W 加细. 由引理 1.8, $\mathscr{U}$ 存在开加细 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 使 $\mathscr{V}_n$ 是 X 的点有限集族. 这时, X 的定向开覆盖 $\{\cup\mathscr{V}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 存在闭包保持的闭加细 $\{F_n:n\in\mathbb{N}\}$, 使 $F_n\subset\cup\mathscr{V}_n$. 从而 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{V-\bigcup_{k<n}F_k:V\in\mathscr{V}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点有限的开加细.

由定理 2.4 的 (1) ⇔ (3), 有下述亚紧空间的映射定理.

推论 A.2.5[398] (Worrell 定理)　闭映射保持亚紧性.

定理 A.2.6[190, 398]　下述条件等价:

(1) X 是亚紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有点有限的加细 $\mathscr{H}$, 满足对 $x\in X$, 有 $x\in\mathrm{st}(x,\mathscr{H})^\circ$;

(3) X 的每一开覆盖有点态 W 开加细.

证明　(1) ⇒ (2) 是显然的.

(2) ⇒ (3). 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}$ 有点有限加细 $\mathscr{H}$, 满足 (2) 的要求. 对 $H\in\mathscr{H}$, 取 $U_H\in\mathscr{U}$, 使 $H\subset U_H$. 对 $x\in X$, 定义

$$V_x=\mathrm{st}(x,\mathscr{H})^\circ\cap(\cap\{U_H:H\in(\mathscr{H})_x\}).$$

则 $\{V_x:x\in X\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点态 W 开加细.

(3) ⇒ (1). 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使 $\mathscr{U}_1=\mathscr{U}$ 且 $\mathscr{U}_{n+1}$ 是 $\mathscr{U}_n$ 的点态 W 加细. 由引理 1.8, $\mathscr{U}$ 有开加细 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 使 $\mathscr{V}_n$ 是 X 的点有限集族. 让 $\mathscr{W}$ 是 $\{\cup\mathscr{V}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 的点态 W 开加细. 对 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$F_n=\{x\in X:\mathrm{st}(x,\mathscr{W})\subset\cup\{\cup\mathscr{V}_i:i\leqslant n\}\}.$$

那么 $\overline{F}_n\subset\bigcup_{i\leqslant n}(\cup\mathscr{V}_i)$ 且 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{F}_n$. 于是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{V-\bigcup_{i<n}\overline{F}_i:V\in\mathscr{V}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点有限开加细.

推论 A.2.7[191] 仿紧空间的伪开紧映象是亚紧空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是伪开紧映射, 其中 X 是仿紧空间. 若 $\mathscr{U}$ 是 Y 的开覆盖, 那么 X 的开覆盖 $f^{-1}(\mathscr{U})$ 有局部有限的开加细 $\mathscr{V}$, 于是 $f(\mathscr{V})$ 是 $\mathscr{U}$ 的点有限加细且满足定理 2.6(2). 故 Y 是亚紧空间.

由命题 1.13 类似的方法, 可证明命题 2.8.

命题 A.2.8[135, 177] X 是可数亚紧空间当且仅当若 $\{F_n\}$ 是 X 的递减的闭集列且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$, 则存在 X 的开集列 $\{G_n\}$, 使 $F_n \subset G_n$ 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \varnothing$.

A.3 次仿紧空间

定义 A.3.1[64] X 称为次仿紧空间, 若 X 的每一开覆盖存在 σ 离散的闭加细.

命题 A.3.2[63] 设 $f: X \to Y$ 是逆紧映射, 其中 X 是 T_2 空间. 如果 Y 是次仿紧空间, 则 X 是次仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 对 $y \in Y, f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集, 由正文引理 3.2.8, 存在 $O_y \in \tau(X)$, 使 $f^{-1}(y) \subset O_y$ 且在 O_y 中 $\mathscr{U}_{|O_y}$ 有有限的闭加细. 由于 f 是闭映射, 存在 $H_y \in \tau(Y)$, 使 $y \in H_y$ 且 $f^{-1}(H_y) \subset O_y$, 那么在 $f^{-1}(H_y)$ 中 $\mathscr{U}_{|f^{-1}(H_y)}$ 有有限的闭加细 $\mathscr{F}_y$. 让 $\mathscr{H} = \{H_y : y \in Y\}$. 因为 Y 是次仿紧空间, $\mathscr{H}$ 有加细 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_i$, 其中 $\mathscr{W}_i = \{W_{iy} : y \in Y\}$ 是离散的闭集族且 $W_{iy} \subset H_y$. 对 $i \in \mathbb{N}$, 置 $\mathscr{P}_i = \{f^{-1}(W_{iy}) \cap F : y \in Y, F \in \mathscr{F}_y\}$. 往证 $\mathscr{P} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散的闭加细. 显然, $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细. 对 $i \in \mathbb{N}$, 因为 $f^{-1}(\mathscr{W}_i)$ 是离散的且对 $y \in Y$, $\mathscr{F}_y$ 是有限的, 于是 $\mathscr{P}_i$ 是 σ 离散的. 对 $y \in Y$ 和 $F \in \mathscr{F}_y$, 如果 $x \in X - (f^{-1}(W_{iy}) \cap F)$, 置

$$L_x = \begin{cases} X - f^{-1}(W_{iy}), & x \in X - f^{-1}(W_{iy}), \\ f^{-1}(H_y) - F, & x \in f^{-1}(W_{iy}) - F, \end{cases}$$

那么 L_x 是 x 在 X 的开邻域且 $L_x \cap (f^{-1}(W_{iy}) \cap F) = \varnothing$, 于是 $f^{-1}(W_{iy}) \cap F$ 是闭的. 故 X 是次仿紧空间.

定理 A.3.3[64, 189] 下述条件等价:

(1) X 是次仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在开加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足对 $x \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $U \in \mathscr{U}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U$;

(3) X 的每一开覆盖有 σ 局部有限的闭加细;

(4) X 的每一开覆盖有 σ 闭包保持的闭加细;

(5) X 的每一开覆盖有 σ 垫状加细.

证明　只须证 (1) ⇒ (2) ⇒ (5) ⇒ (1).

(1) ⇒ (2). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 让 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭加细, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是离散的. 对 $n\in\mathbb{N}, F\in\mathscr{F}_n$, 选取 $U_F\in\mathscr{U}$, 使 $F\subset U_F$. 令

$$E_n=\cup\mathscr{F}_n,$$
$$V_F=U_F-(E_n-F),$$
$$\mathscr{V}_n=\{V_F:F\in\mathscr{F}_n\}\cup\{U-E_n:U\in\mathscr{U}\}.$$

则 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{V}_n\}$ 满足 (2) 的要求.

(2) ⇒ (5). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 让 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细序列且满足 (2) 的要求. 记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 对 $n\in\mathbb{N},\alpha\in\Lambda$, 令

$$F(n,\alpha)=\{x\in X:\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U_\alpha\},$$
$$\mathscr{F}_n=\{F(n,\alpha):\alpha\in\Lambda\}.$$

那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细. 对 $\Lambda'\subset\Lambda$, 设 $x\in X-\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}U_\alpha$. 如果 $n\in\mathbb{N},\alpha\in\Lambda'$ 且 $y\in F(n,\alpha)$, 那么 $x\notin\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_n)$, 从而 $y\notin\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 于是 $x\notin\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F(n,\alpha)}$. 因此, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 垫状加细.

(5) ⇒ (1). 为叙述简洁起见, 采用记号: 对 $n,k\in\mathbb{N}$, 及 $s=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in\mathbb{N}^k$, 记 $s\oplus n=(i_1,i_2,\cdots,i_k,n)$. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha<\gamma\}$. 若 $k\in\mathbb{N},s\in\mathbb{N}^k$, 依下述方式对 k 进行归纳, 定义 $\mathscr{U}$ 的开加细 $\mathscr{U}(s)$ 以及 $\mathscr{U}(s)$ 的 σ 垫状加细 $\mathscr{F}(s)$. 对 $t\in\mathbb{N}$, 置

$$V_\alpha(t)=W_\alpha(t)=U_\alpha,\alpha<\gamma;$$
$$\mathscr{U}(t)=\{V_\alpha(t):\alpha<\gamma\}\cup\{W_\alpha(t):\alpha<\gamma\}.$$

现设 $\mathscr{U}(s)$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细, 具形式

$$\mathscr{U}(s)=\{V_\alpha(s):\alpha<\gamma\}\cup\{W_\alpha(s):\alpha<\gamma\}.$$

让 $\mathscr{F}(s)$ 是 $\mathscr{U}(s)$ 的 σ 垫状加细, 具形式

$$\mathscr{F}(s)=\{H_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma,n\in\mathbb{N}\}\cup\{K_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma,n\in\mathbb{N}\},$$

其中 $\{H_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma\},\{K_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma\}$ 分别是 $\{V_\alpha(s):\alpha<\gamma\}$ 和 $\{W_\alpha(s):\alpha<\gamma\}$ 的垫状. 令 $U_\alpha(s)=V_\alpha(s)\cup W_\alpha(s)$. 定义

$$V_\alpha(s\oplus n)=U_\alpha(s)-\overline{\cup\{H_\beta(s\oplus n)\cup K_\beta(s\oplus n):\alpha\neq\beta<\gamma\}},$$
$$W_\alpha(s\oplus n)=U_\alpha(s)\cap(\cup\{U_\beta(s):\alpha<\beta<\gamma\})$$
$$-\overline{\cup\{H_\beta(s\oplus n)\cup K_\beta(s\oplus n):\beta<\alpha\}},$$
$$\mathscr{U}(s\oplus n)=\{V_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma\}\cup\{W_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma\}.$$

(3.1) $\mathscr{U}(s\oplus n)$ 是 X 的覆盖.

对 $x\in X$, 如果 $x\notin\bigcup_{\alpha<\gamma}V_\alpha(s\oplus n)$, 让 $\delta=\min\{\alpha<\gamma:x\in U_\alpha(s)\}$. 那么 $x\in\overline{\bigcup_{\delta<\beta<\gamma}H_\beta(s\oplus n)\cup K_\beta(s\oplus n)}$, 于是有 $\beta>\delta$, 使 $x\in U_\beta(\delta)$, 从而 $x\in W_\delta(s\oplus n)$. 因此, $\mathscr{U}(s\oplus n)$ 覆盖 X.

对 $s\in\mathbb{N}^k, n\in\mathbb{N}, \alpha<\gamma$, 定义

$$T_\alpha(s\oplus n)=\overline{H_\alpha(s\oplus n)}-\cup\{V_\beta(s):\alpha\neq\beta<\gamma\}.$$

由于 $\{H_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma\}$ 是 $\{V_\alpha(s):\alpha<\gamma\}$ 的垫状, $\{T_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma\}$ 是 X 的离散闭集族且 $T_\alpha(s\oplus n)\subset U_\alpha$.

(3.2) $\{T_\alpha(s\oplus n):\alpha<\gamma, s\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k, n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的覆盖.

对 $x\in X$, 令 $\delta=\min\{\beta<\gamma:x\in H_\beta(h)\cup K_\beta(h), h\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k\}$. 那么存在 $t\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k, n\in\mathbb{N}$, 使 $x\in H_\delta(t\oplus n)\cup K_\delta(t\oplus n)$. 取 $m\in\mathbb{N},\sigma<\gamma$, 满足

$$x\in H_\sigma(t\oplus n\oplus m)\cup K_\sigma(t\oplus n\oplus m)\subset V_\sigma(t\oplus n)\cup W_\sigma(t\oplus n).$$

于是, 若 $\alpha>\delta$, 那么 $x\notin V_\sigma(t\oplus n)\cup W_\sigma(t\oplus n)$, 从而 $\sigma=\delta$. 而 $x\notin\bigcup_{\beta>\delta}U_\beta(t\oplus n)$, 所以 $x\notin W_\delta(t\oplus n\oplus m)$, 因此 $x\in H_\delta(t\oplus n\oplus m)$. 又由于 $x\in H_\delta(t\oplus n)\cup K_\delta(t\oplus n)$, 于是当 $\beta\neq\delta$ 时, $x\notin V_\beta(t\oplus n)$, 故 $x\in H_\delta(t\oplus n\oplus m)-\bigcup_{\beta\neq\delta}V_\beta(t\oplus n)\subset T_\delta(t\oplus n\oplus m)$.

综上所述, $\mathscr{U}$ 具有 σ 离散闭加细, 所以 X 是次仿紧空间.

推论 A.3.4[64] 闭映射保持次仿紧性.

A.4 次亚紧空间

定义 A.4.1 X 称为次亚紧空间 [189] (或 θ 可加细空间 [400]), 若 X 的任一开覆盖存在开加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足对 $x\in X$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $\mathscr{U}_n$ 中仅有有限个元含点 x. 这覆盖序列称为 X 的 θ 序列. 开加细的 θ 序列也称为 θ 开加细序列.

X 的覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 的点态 W 加细序列, 若对 $x\in X$, 存在 $\mathscr{U}'\in\mathscr{U}^{<\omega}$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 使 $(\mathscr{U}_n)_x$ 部分加细 $\mathscr{U}'$.

定理 A.4.2[400] 次亚紧的可数紧空间是紧空间.

证明 设 X 是次亚紧的可数紧空间. 让 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 那么 $\mathscr{U}$ 存在 θ 开加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 记 $\mathscr{U}_n=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda_n\}$. 对 Λ_n 中互不相同的元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$, 置

$$F_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)=\cap\{U_{\alpha_i}:i\leqslant k\}-\cup\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda_n-\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}\}.$$

由于 $\{F_n(\alpha):\alpha\in\Lambda_n\}$ 是 X 的离散集族, 于是它是有限集, 从而存在 $\mathscr{U}_n$ 的有限集 $\mathscr{U}_{n1}$ 覆盖 $\{F_n(\alpha):\alpha\in\Lambda_n\}$. 同理, 存在 $\mathscr{U}_n$ 的有限集 $\mathscr{U}_{n2}$ 覆盖 $\{F_n(\alpha_1,\alpha_2)-\cup\mathscr{U}_{n1}:\alpha_1,\alpha_2\in\Lambda_n\}$. 依此类推, 可得到 $\mathscr{U}_n$ 的有限集的序列 $\{\mathscr{U}_{nk}\}$, 使 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_{nk}$ 覆盖 $\cup\{F_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_k):\alpha_i\in\Lambda_n, i\leqslant k\in\mathbb{N}\}$. 这时 $\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_{nk}$ 是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n$ 的可数子覆盖. 因此, $\mathscr{U}$ 存在有限子覆盖. 故 X 是紧空间.

下面, 建立次亚紧空间的 Junnila 特征.

引理 A.4.3　若 X 的每一(内部保持) 开覆盖存在(内部保持) 开加细点态 W 加细序列, 则 X 的(内部保持) 开覆盖有开加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足

$(*)$ 对 $x \in X$, 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{n_i\}$, 使 $(\mathscr{U}_{n_{i+1}})_x$ 部分加细 $\mathscr{U}_{n_i}$.

证明　对 X 的(内部保持) 开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在(内部保持) 开加细点态 W 加细序列 $\{H_{1n}\}$, 记其为 $\mathscr{U} \to \{H_{1n}\}_{n\geqslant 1}$. 同理, 对 $m \in \mathbb{N}$, 有 $\mathscr{H}_{mm} \wedge (\bigwedge_{i\leqslant m} \mathscr{H}_{im+1}) \to \{H_{m+1n}\}_{n\geqslant m+1}$. 令 $\mathscr{U}_n = \mathscr{H}_{nn}$. 那么对 $x \in X, m \in \mathbb{N}$, 存在 $n > m$, 使 $(\mathscr{U}_n)_x$ 部分加细 $\mathscr{U}_m$. 故 X 的(内部保持) 开覆盖 $\mathscr{U}$ 有(内部保持) 开加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足 $(*)$.

引理 A.4.4　若 X 的覆盖 $\mathscr{B}$ 存在开加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足 $(*)$, 那么 $\mathscr{B}$ 有 θ 开加细序列.

证明　记 $\mathscr{B} = \{B_\alpha : \alpha < \gamma\}$, 其中 γ 是初始序数. 对 $U \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{U}^k$, 令 $\alpha(U) = \min\{\beta < \gamma : U \subset B_\beta\}$. 对 $n \in \mathbb{N}, V \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{U}^k$, 称 $\mathscr{U}_n$ 具有性质 $\Phi(V)$, 如果 $\{\alpha(U) : V \subset U \in \mathscr{U}_n\} \subset \{\alpha(V)\}$. 对 $n, k \in \mathbb{N}$, 定义

$$\mathscr{V}_{nk} = \{V \in \mathscr{U}_k : \mathscr{U}_n \text{ 具有性质 } \Phi(V)\},$$

$$L_{nk} = \{x \in X : (\mathscr{U}_k)_x \text{ 部分加细 } \mathscr{U}_n\}.$$

对 $n > 1, s \in \mathbb{N}^n$, 置

$$L_s = \bigcap\nolimits_{i<n} L_{s(i)s(i+1)}, \text{ 其中 } s(i) \text{ 表示 } s \text{ 的第 } i \text{ 个坐标};$$

$$H_s = \{x \in L_s : \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{s(n)}) \subset \cup(\bigcup\nolimits_{i<n} \mathscr{V}_{s(i)s(i+1)})\}.$$

(4.1) $\{H_s : s \in \bigcup_{n>1} \mathbb{N}^n\}$ 是 X 的覆盖.

对 $x \in X$, 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{t_n\}$ 和 X 的有限子族的序列 $\{\mathscr{F}_n\}$, 使 $\mathscr{F}_n \subset (\mathscr{U}_{t_n})_x$ 且 $(\mathscr{U}_{t_{n+1}})_x$ 部分加细 $\mathscr{U}_{t_n}$. 对 $n > 1$, 置

$$\mathscr{P}_n = \{F \in \mathscr{F}_n : F \not\subset \cup(\cup\{\mathscr{V}_{t_i t_{i+1}} : i < n\})\}.$$

则某 $\mathscr{P}_n = \varnothing$. 否则, 对 $n > 1$, 令 $\alpha_n = \max\{\alpha(P) : P \in \mathscr{P}_n\}$. 由于 $\mathscr{P}_{n+1}$ 部分加细 $\mathscr{P}_n$, 于是 $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$, 从而存在 $k > 3$, 使 $\alpha_k = \alpha_{k-1} = \alpha_{k-2}$. 取 $P \in \mathscr{P}_k$, 使 $\alpha(P) = \alpha_k$. 断言: $\mathscr{U}_{t_{k-1}}$ 具性质 $\Phi(P)$. 事实上, 对 $P \subset U \in \mathscr{U}_{t_{k-1}}$, 则 $U \in (\mathscr{U}_{t_{k-1}})_x$, 于是存在 $F \in \mathscr{F}_{k-2}$, 使 $U \subset F$, 从而 $P \subset U \subset F$, 那么 $\alpha_k = \alpha(P) \leqslant \alpha(U) \leqslant \alpha(F) \leqslant \alpha_{k-2}$, 因此 $\alpha(U) = \alpha(P)$, 所以 $\mathscr{U}_{t_{k-1}}$ 具性质 $\Phi(P)$. 故 $P \in \mathscr{V}_{t_{k-1}t_k}$, 这与 $P \in \mathscr{P}_k$ 相矛盾. 因而存在 $n > 1$, 使 $\mathscr{P}_n = \varnothing$. 置 $t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n+1})$. 那么 $x \in H_t$. (4.1) 得证.

对 $k \in \mathbb{N}$, 置

$$W_{nk\alpha} = \cup\{V \in \mathscr{V}_{nk} : \alpha(V) = \alpha\}, \ \alpha < \gamma;$$

$$\mathscr{W}_{nk} = \{W_{nk\alpha} : \alpha < \gamma\}.$$

(4.2) $\mathscr{W}_{nk}$ 在 L_{nk} 上是点有限集族.

对 $x \in L_{nk}$, 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{U}_n^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{U}_k)_x$ 加细 $\mathscr{F}$. 令 $\Lambda = \{\alpha(F) : F \in \mathscr{F}\}$. 为证明 $(\mathscr{W}_{nk})_x$ 是有限的, 只须验证 $\{\alpha < \gamma : x \in W_{nk\alpha}\} \subset \Lambda$. 设 $\alpha < \gamma$ 且 $x \in W_{nk\alpha}$. 则存在 $V \in \mathscr{V}_{nk}$, 使 $x \in V$ 且 $\alpha(V) = \alpha$, 于是 $V \in (\mathscr{U}_k)_x$, 从而存在 $F \in \mathscr{F}$, 使 $V \subset F$. 而 $\mathscr{U}_n$ 具性质 $\Phi(V)$, 所以 $\alpha(V) = \alpha(F)$, 因此 $\alpha \in \Lambda$.

对 $n > 1, s \in \mathbb{N}^n$, 定义

$$\mathscr{W}_s = \bigcup_{i<n} \mathscr{W}_{s(i)s(i+1)},$$
$$\mathscr{U}_s = \{U \in \mathscr{U}_{s(n)} : U \not\subset \cup\mathscr{W}_s\},$$
$$\mathscr{H}_s = \mathscr{W}_s \cup \mathscr{U}_s.$$

那么 $\mathscr{H}_s$ 是 $\mathscr{B}$ 的开加细且

(4.3) $\mathscr{H}_s$ 在 H_s 上是点有限集族.

对 $x \in H_s, \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{s(n)}) \subset \cup(\bigcup_{i<n} \mathscr{V}_{s(i)s(i+1)}) = \cup\mathscr{W}_s$, 于是 $x \notin \cup\mathscr{U}_s$, 从而 $(\mathscr{H}_s)_x = (\mathscr{W}_s)_x = \bigcup_{i<n}(\mathscr{W}_{s(i)s(i+1)})_x$. 由 (4.2), $(\mathscr{H}_s)_x$ 是有限的.

综合 (4.1) 和 (4.3), $\{\mathscr{H}_s : s \in \bigcup_{n>1} \mathbb{N}^n\}$ 是 $\mathscr{B}$ 的 θ 开加细序列.

引理 A.4.5　若 X 的每一良序开覆盖有 θ 开加细序列, 则 X 的每一开覆盖有点态 W 开加细序列.

证明　对基数 γ, 以 $P(\gamma)$ 表示命题: X 的每一基数为 γ 的开覆盖有点态 W 开加细序列. 用超限归纳法证明, 对每一基数 $\gamma, P(\gamma)$ 为真. 假设 γ 是无限基数且对 $\lambda < \gamma$, 有 $P(\lambda)$ 成立. 如果 $\mathscr{U}$ 是 X 的基数为 γ 的开覆盖, 记 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$. 那么 $\{\bigcup_{\beta \leqslant \alpha} U_\beta : \alpha < \gamma\}$ 是 X 的良序开覆盖, 于是它有 θ 开加细序列 $\{\mathscr{V}_n\}$. 对 $V \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$, 取 $\alpha(V) < \gamma$, 使 $V \subset \cup\{U_\beta : \beta \leqslant \alpha(V)\}$. 对 $\alpha < \gamma, n \in \mathbb{N}$, 令

$$P_{\alpha n} = \cup\{V \in \mathscr{V}_n : \alpha(V) > \alpha\},$$
$$\mathscr{P}_{\alpha n} = \{P_{\alpha n}\} \cup \{U_\beta : \beta \leqslant \alpha\}.$$

由归纳假设, $\mathscr{P}_{\alpha n}$ 存在点态 W 开加细序列 $\{\mathscr{W}_{\alpha nk}\}$. 对 $n, i \in \mathbb{N}$, 置

$$F_{ni} = \{x \in X : |(\mathscr{V}_n)_x| \leqslant i\},$$
$$G_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_{ni}.$$

那么 $\mathscr{F}_{ni}$ 是 X 的闭集且 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. 对 $x \in G_n$, 令

$$\alpha(x, n) = \max\{\alpha(V) : V \in (\mathscr{V}_n)_x\}.$$

取 $W_{nk}(x) \in (\mathscr{W}_{\alpha(x,n)nk})_x$, 再令

$$H_{nk}(x) = (\bigcap_{i\leqslant k} W_{ni}(x)) \cap (\cap(\mathscr{V}_n)_x),$$
$$\mathscr{H}_{nk} = \{H_{nk}(x) : x \in G_n\} \cup \{X - F_{nk}\}.$$

(5.1) $\mathscr{H}_{nk}$ 是 X 的覆盖.

这是因为, 对 $x \in X$, 如果 $x \in F_{nk}$, 那么 $x \in H_{nk}(x)$.

(5.2) $\{\mathscr{H}_{nk}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点态 W 加细序列.

对 $x \in X$, 取 $n \in \mathbb{N}$, 使 $x \in G_n$. 令

$$\Lambda = \{\alpha(V) : V \in (\mathscr{V}_n)_x\}.$$

对 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $k_\alpha \in \mathbb{N}, \mathscr{F}_\alpha \in \mathscr{P}_{\alpha n}^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{W}_{\alpha n k_\alpha})_x$ 部分加细 $\mathscr{F}_\alpha$. 定义

$$\mathscr{F} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{F}_\alpha \cap \mathscr{U},$$
$$k = \max\{k_\alpha : \alpha \in \Lambda\} + |(\mathscr{V}_n)_x|.$$

断言: $(\mathscr{H}_{nk})_x$ 部分加细 $\mathscr{F}$. 事实上, 设 $H \in (\mathscr{H}_{nk})_x$. 则 $x \in F_{nk}$, 于是存在 $y \in G_n$, 使 $H = H_{nk}(y)$. 记 $\alpha = \alpha(y, n)$, 取 $V \in (\mathscr{V}_n)_y$, 使 $\alpha(V) = \alpha$. 于是 $x \in H_{nk}(y) \subset V$ 且 $\alpha \in \Lambda$. 令 $j = k_\alpha$. 由于 $j \leqslant k$, 从而 $H_{nk}(y) \subset W_{nj}(y)$, 因此存在 $F \in \mathscr{F}_\alpha$, 使 $W_{nj}(y) \subset F$. 又由于 $y \in F - P_{\alpha n}$, 所以 $F \in \mathscr{U}$, 故 $H \subset F \in \mathscr{F}$. 而 $\mathscr{F}$ 是有限的, 于是 $\{\mathscr{H}_{nk}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点态 W 加细序列.

由此可知, X 的每一开覆盖有点态 W 开加细序列.

引理 A.4.6　若 X 的每一内部保持的定向开覆盖存在 σ 闭包保持的闭加细, 那么 X 的每一内部保持的开覆盖存在 θ 开加细序列.

证明　设 $\mathscr{U}$ 是 X 的内部保持的开覆盖. 则 $\mathscr{U}^F$ 是 X 的内部保持的定向开覆盖, 于是 $\mathscr{U}^F$ 有闭加细 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, 其中 $\mathscr{F}_n$ 是闭包保持的. 对 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, 令

$$V_n(x) = \cap(\mathscr{U})_x - \cup\{F \in \mathscr{F}_n : x \notin F\},$$
$$\mathscr{V}_n = \{V_n(x) : x \in X\}.$$

则 $\mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的内部保持的开加细. 往证 $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点态 W 加细序列. 对 $x \in X$, 取 $n \in \mathbb{N}$ 和 $F \in \mathscr{F}_n$, 满足 $x \in F$, 于是有 $\mathscr{U}' \in \mathscr{U}^{<\omega}$, 使 $F \subset \cup\mathscr{U}'$. 设 $y \in X$, 且 $x \in V_n(y)$. 则 $y \in F$. 于是存在 $U \in \mathscr{U}'$, 使 $y \in U$, 从而 $V_n(y) \subset U$, 所以 $(\mathscr{V}_n)_x$ 部分加细 $\mathscr{U}'$. 由引理 4.3 和 4.4, $\mathscr{U}$ 存在 θ 开加细序列.

引理 A.4.7　若 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在 θ 开加细序列, 那么有 X 的 σ 闭包保持的闭覆盖 $\mathscr{F}$, 满足对 $x \in X$, 存在 $F \in \mathscr{F}$ 和 $\mathscr{U}' \in (\mathscr{U})_x^{<\omega}$, 使 $x \in F \subset \cup\mathscr{U}'$.

证明　设 $\{\mathscr{V}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 θ 开加细序列. 对 $n, k \in \mathbb{N}$, 令

$$F_{nk} = \{x \in X : |(\mathscr{V}_n)_x| \leqslant k\}.$$

则 F_{nk} 是 X 的闭集. 定义

$$F_n(\mathscr{V}) = X - \cup(\mathscr{V}_n - \mathscr{V}),\ \mathscr{V} \in \mathscr{V}_n^{<\omega};$$
$$\mathscr{F}_n = \{F_n(\mathscr{V}) : \mathscr{V} \in \mathscr{V}_n^{<\omega}\};$$
$$\mathscr{F}_{nk} = \mathscr{F}_{n|F_{nk}}.$$

由于 $\mathscr{V}_{n|F_{nk}}$ 是点有限的, 于是它是 X 的子空间 F_{nk} 的内部保持的开覆盖, 从而 $\mathscr{F}_{nk}$ 是 X 的闭包保持的闭集族. 置

$$\mathscr{F} = \cup\{\mathscr{F}_{nk} : n, k \in \mathbb{N}\}.$$

对 $x \in X$, 取 $n, k \in \mathbb{N}$, 使 $x \in F_{nk}$. 再取 $\mathscr{U}' \in (\mathscr{U})_x^{<\omega}$, 使 $(\mathscr{V}_n)_x$ 部分加细 $\mathscr{U}'$. 那么 $F = F_n((\mathscr{V}_n)_x) \cap F_{nk} \in \mathscr{F}$ 且 $x \in F \subset \cup\mathscr{U}'$.

定理 A.4.8[189] 下述条件等价:

(1) X 是次亚紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有点态 W 开加细序列;

(3) X 的每一良序开覆盖有 θ 开加细序列;

(4) X 的每一内部保持的定向开覆盖有 σ 闭包保持的闭加细;

(5) X 的每一定向开覆盖有 σ 闭包保持的闭加细;

(6) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在 σ 闭包保持的闭集族 $\mathscr{F}$, 满足对 $x\in X$, 存在 $F\in\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{U}'\in(\mathscr{U})_x^{<\omega}$, 使 $x\in F\subset\cup\mathscr{U}'$.

证明 由引理 4.7 得 (1) $\Rightarrow$ (6). (6) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (4) 是显然的. 由引理 4.6 得 (4) $\Rightarrow$ (3). 由引理 4.5 得 (3) $\Rightarrow$ (2). 由引理 4.3 和 4.4 得 (2) $\Rightarrow$ (1).

推论 A.4.9[189] (Junnila 定理) 闭映射保持次亚紧性.

定理 A.4.10[357] X 是仿紧空间当且仅当 X 是次亚紧的可膨胀空间.

证明 只须证充分性. 设 X 是次亚紧的可膨胀空间. 由于可膨胀空间是可数仿紧空间, 为证 X 是仿紧空间, 只须证 X 的任一开覆盖存在 σ 局部有限的开加细. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 设 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 θ 开加细序列. 对 $i\in\mathbb{N}$, 记 $\mathscr{U}_i=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda_i\}$. 归纳构造 X 的开集族的序列 $\{\mathscr{V}_{ij}\}$, 满足

(1) $\mathscr{V}_{ij}$ 是 $\mathscr{U}_i$ 的局部有限的部分加细;

(2) 对 $x\in X$, 如果 $|(\mathscr{U}_i)_x|\leqslant m$, 那么 $x\in\bigcup_{j\leqslant m}V_{ij}$, 其中 $V_{ij}=\cup\mathscr{V}_{ij}$;

(3) 如果 $x\in V_{ij}$, 那么 $|(\mathscr{U}_i)_x|\geqslant j$.

首先, 令 $\mathscr{V}_{i0}=\varnothing$. 假设对 $0\leqslant j\leqslant n$, 已构造了 $\mathscr{V}_{ij}$ 满足条件 (1) – (3). 记 $\mathscr{A}=\{A\subset\Lambda_i:|A|=n+1\}$. 对 $A\in\mathscr{A}$, 定义

$$F_A=(X-\bigcup_{j\leqslant n}V_{ij})\cap(X-\cup\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda_i-A\}).$$

那么 $\mathscr{F}=\{F_A:A\in\mathscr{A}\}$ 是 X 的闭集族. 对 $x\in X$, 如果 $|(\mathscr{U}_i)_x|<n+1$, 那么 x 的邻域 $\bigcup_{j\leqslant n}V_{ij}$ 不与 $\mathscr{F}$ 中的任何元相交; 如果 $|(\mathscr{U}_i)_x|\geqslant n+1$, 选取 $A\in\mathscr{A}$, 使 $x\in\cap\{U_\alpha:\alpha\in A\}$, 那么 $\cap\{U_\alpha:\alpha\in A\}$ 仅可能与 $\mathscr{F}$ 中的元 F_A 相交. 因而 $\mathscr{F}$ 是 X 的离散闭集族. 由 X 的可膨胀性, 存在 X 的局部有限的开集族 $\{G_A:A\in\mathscr{A}\}$, 使 $F_A\subset G_A$. 置

$$\mathscr{V}_{in+1}=\{G_A\cap(\cap\{U_\alpha:\alpha\in A\}):A\in\mathscr{A}\}.$$

那么 $\mathscr{V}_{in+1}$ 是满足条件 (1) – (3) 的集族.

因为 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 θ 开加细序列, 所以 $\bigcup_{i,j\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_{ij}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限的开加细. 故 X 是仿紧空间.

命题 A.4.11[135] 次亚紧空间是可数亚紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是次亚紧空间 X 的可数开覆盖. 让 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 θ 开加细序列. 令 $V_1=U_1$, $V_n=\mathrm{st}(X-\bigcup_{i<n}U_i,\bigwedge_{i<n}\mathscr{U}_i),n>1$. 则 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是

$\mathscr{U}$ 的点有限开加细.

A.5　亚 Lindelöf 空间

定义 A.5.1[14]　X 称为亚 Lindelöf 空间, 若 X 的每一开覆盖存在点可数的开加细. 如果 X 的每一个子空间都是亚 Lindelöf 空间, 那么 X 称为遗传亚 Lindelöf 空间.

空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为 X 的按指标良序覆盖, 若 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 其中 Λ 是良序指标集. 对这种覆盖, 若 $x\in X$, 记 $\alpha_x=\min\{\alpha\in\Lambda : x\in U_\alpha\}$; 若 $\alpha\in\Lambda$, 记 $\widetilde{U}_\alpha=\{x\in X:\alpha_x=\beta\}$. 显然 $\widetilde{U}_\alpha\subset U_\alpha$.

定理 A.5.2[143]　下述条件等价:

(1) X 是遗传亚 Lindelöf 空间;

(2) X 的每一按指标良序开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 存在点可数开加细 $\mathscr{V}$, 满足若 $x\in X$, 则存在 $V\in\mathscr{V}$, 使 $x\in V\subset U_{\alpha_x}$;

(3) X 的每一按指标良序开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 存在点可数开加细 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 满足若 $\alpha\in\Lambda$, 则 $\widetilde{U}_\alpha\subset V_\alpha\subset U_\alpha$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设存在序数 γ 及遗传亚 Lindelöf 空间 X 的按指标良序开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$, 使它没有满足 (2) 的点可数开加细. 不妨设 γ 是具有上述性质的最小序数. 对 $\alpha<\gamma$, 空间 $\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$ 的按指标良序开覆盖 $\{U_\beta\}_{\beta<\alpha}$ 有点可数的开加细 $\mathscr{V}_\alpha$, 满足 (2) 的要求. 如果存在序数 α, 使 $\gamma=\alpha+1$, 则 $\mathscr{V}_\alpha\cup\{U_\alpha\}$ 是 $\{U_\beta\}_{\beta<\gamma}$ 的满足 (2) 要求的点可数开加细, 所以 γ 是极限序数. 设 $\mathscr{W}$ 是 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ 的点可数开加细. 对 $W\in\mathscr{W}$, 选取 $\alpha(W)<\gamma$, 使 $W\subset U_{\alpha(W)}$. 定义

$$\mathscr{V}=\{W\cap V : W\in\mathscr{W}, V\in\mathscr{V}_{\alpha(W)+1}\}.$$

那么 $\mathscr{V}$ 是 X 的点可数的开集族. 对 $x\in X$, 任取 $W\in(\mathscr{W})_x$. 那么 $x\in U_{\alpha(W)}\subset\cup\{U_\beta:\beta<\alpha(W)+1\}$, 于是存在 $V\in\mathscr{V}_{\alpha(W)+1}$, 使 $x\in V\subset U_{\alpha_x}$, 从而 $W\cap V\in\mathscr{V}$ 且 $x\in W\cap V\subset U_{\alpha_x}$. 因此 $\mathscr{V}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ 的满足 (2) 的点可数开加细, 矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的按指标良序开覆盖. 让 $\mathscr{V}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的满足 (2) 的点可数开加细. 对 $\alpha\in\Lambda$, 置

$$V_\alpha=\cup\{V\in\mathscr{V} : V\subset U_\alpha;\ \text{如果}\ \beta<\alpha,\ \text{则}\ V\not\subset U_\beta\}.$$

那么 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是满足 (3) 的点可数开覆盖.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 Y 是 X 的子空间. 对 Y 的按指标良序开覆盖 $\mathscr{W}=\{W_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$, 取 X 的按指标良序开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\leqslant\gamma}$, 使 $U_\gamma=X$ 并且当 $\alpha<\gamma$ 时, $U_\alpha\cap Y=W_\alpha$. 让 $\{V_\alpha\}_{\alpha\leqslant\gamma}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\leqslant\gamma}$ 的满足 (3) 的点可数开加细. 若 $y\in Y$, 则存在 $\alpha<\gamma$, 使

$y \in \widetilde{U}_\alpha \subset V_\alpha$, 从而 $\{V_\alpha \cap Y\}_{\alpha<\gamma}$ 是 $\mathscr{W}$ 的点可数开加细. 因此, Y 是亚 Lindelöf 空间. 故 X 是遗传亚 Lindelöf 空间.

推论 A.5.3[143] 伪开 s 映射保持遗传亚 Lindelöf 性.

证明 设 $f: X \to Y$ 是伪开 s 映射, 其中 X 是遗传亚 Lindelöf 空间. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 Y 的按指标良序开覆盖. 那么 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的按指标良序开覆盖, 于是它有点可数的开加细 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 满足若 $\alpha \in \Lambda$, 则 $f^{-1}(U_\alpha)^\sim \subset V_\alpha \subset f^{-1}(U_\alpha)$. 这时 $f(V_\alpha) \subset U_\alpha$, 且 $f^{-1}(\widetilde{U}_\alpha) \subset f^{-1}(U_\alpha)^\sim \subset V_\alpha$. 由于 f 是伪开 s 映射, 对 $\alpha \in \Lambda$, 若令 $W_\alpha = f(V_\alpha)^\circ$, 那么 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的点可数开加细, 并且满足对 $\alpha \in \Lambda$, 有 $\widetilde{U}_\alpha \subset W_\alpha \subset U_\alpha$. 故 Y 是遗传亚 Lindelöf 空间.

附录 B　广义度量空间理论的形成

D. Hilbert 在 1900 年巴黎国际数学家大会上作的《数学问题》的著名演讲中指出: 只要一门科学分支能提出大量的问题, 它就充满生命力, 而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止. 20 世纪一般拓扑学的发展证实了 Hilbert 的名言.

1944 年 J. Dieudonné 引进仿紧性的概念, 是一般拓扑学进入全盛期的重要标志. 随后拓扑空间论迅猛发展, 其表现形式是为适应不同的目的发现了各种拓扑性质, 其基本方向是为解决各类问题而对仿紧性与可度量性作各式的推广. 这些工作产生了 20 世纪 60 年代以来一般拓扑学研究的重要课题: 广义度量空间理论. 由 Aull 和 Lowen[39~41] 主编的 "Handbook of the History of General Topology", 对一般拓扑学的历史作了详实的记述, 其中 Hodel[166] 的 "A history of generalized metrizable spaces" 重点阐明了 1950 ~ 1980 年间广义度量空间理论的主要成就. 本附录以问题为线索, 力图阐明该课题的形成过程与一些发展脉络. 限于篇幅, 侧重描述 1944 ~ 1976 年间各类广义度量性质产生的背景. 应当声明的是各个时期的划分完全是为了便于说明问题的来龙去脉. 至于广义度量空间理论及相关课题的现代发展, 除本书外, 读者可参考书后的相关文献, 尤其是 Hart, Nagata 和 Vaughan[149] 主编的 " Encyclopedia of General Topology".

B.1　历 史 回 顾

早期一般拓扑学研究的中心课题是关于空间的度量化及紧性问题 [4]. 正如 Rudin[341] 指出, 在这一段时间中, 作为每个数学工作者一般知识的一部分的大多数定理得到了证明. 大量的基础性工作为一般拓扑学奠定了坚实的基础, 使其成为一门独立的数学分支, 对数学其他学科的发展起积极的促进作用. 最重要的成果有:

定理 B.1.1 (Urysohn *度量化定理*, 1925)　具有可数基的正则空间是可度量空间.

定理 B.1.2 (Tietze *扩张定理*, 1925)　一个空间是正规空间当且仅当定义于它的闭子空间上的实值连续函数可连续地扩张到整个空间上.

定理 B.1.3 (Tychonoff *积定理*, 1935)　紧空间的任意积空间是紧空间.

定理 B.1.4 (Tychonoff 紧扩张定理, 1935) 一个空间是完全正则空间当且仅当它存在紧扩张.

上述定理涉及四类空间: 度量空间、紧空间、正规空间和完全正则空间. 由于应用的广泛性, 这四类空间是那时拓扑学者关注的主要对象, 因而取得丰硕成果. 由此也产生一系列亟待解决的问题. 这主要来自两方面的原因: 其一, 度量空间、紧空间与正规空间之间存在较大的空隙, 有必要寻找具有良好性质且介于度量空间、紧空间与正规空间之间的空间类; 其二, 这一时期拓扑学者主要关注集族的某些有限性或可数性, 而对一些不可数情况应如何加以讨论? 例如 1925 年 Urysohn 就提出寻找一般空间的度量化定理, 使 Urysohn 度量化定理是它的自然推论.

1936 年周绍濂在巴黎大学获得法国国家科学博士学位, 点集拓扑学论文 [89] 发表于著名刊物 Fund. Math.

早期一般拓扑学主要成就的意义在于为一般拓扑学今后的发展建立了模式①. 这时期定义的拓扑空间上的拓扑和运算 (Tietze, 1923), 箱拓扑 (Tietze, 1923), Cartesian 积 (Tychonoff, 1930), 逆系的极限 (Lefschetz, 1931), 粘着运算 (Borsuk, 1937), 各种类型的紧扩张 [紧化 (Carathéodory, 1913), Alexandroff 紧化 (1924), Stone-Čech 紧化 (1937), Wallman 紧化 (1938)], 一些重要的空间类 [可数紧空间 (Fréchet, 1906), 紧空间 (Vietoris, 1921), Lindelöf 空间 (Alexandroff, Urysohn, 1929), 可分空间 (Fréchet, 1906), CCC (Suslin, 1920), 局部紧空间 (Alexandroff, 1921), 度量空间 (Fréchet, 1906), 第一可数空间 (Hausdorff, 1914), 第二可数空间 (Hausdorff, 1914), Moore 空间 (Moore, 1916), 可展空间 (Alexandroff, Urysohn, 1923), 半度量空间 (Wilson, 1931), 连通空间 (Hausdorff, 1914), 各种分离公理], 各种形式的映射 [连续映射 (Fréchet, 1910), 同胚映射 (Fréchet, 1910), 闭映射 (Hurewicz, 1926), 开映射 (Aronszajn, 1931), 商映射 (Baer, Levi, 1932), 单调映射 (Whyburn, 1934)], 以及连续函数集合上的点态收敛拓扑和紧开拓扑 (Fox, 1945) 等都已成为现代一般拓扑学研究的重要工具.

B.2 奠基时期

本附录约定: 所论空间至少满足 T_2 分离性公理, τ 表示空间的拓扑, 映射指连续的满函数. 个别空间假设的分离性质与原文稍有不同.

B.2.1 仿紧性的引入

突破对空间集族的有限性或可数性限制的关键是在拓扑空间论的研究中广泛使用局部有限 (局部可数) 集族和点有限 (点可数) 集族.

①资料主要来源于 R. Engelking[101].

定义 B.2.1　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的局部有限 [5] (局部可数) 集族, 如果 X 的每一点存在邻域仅与 $\mathscr{P}$ 中有限 (可数) 个元相交; $\mathscr{P}$ 称为 X 的点有限 (点可数) 集族, 如果 X 的每一点仅属于 $\mathscr{P}$ 中有限 (可数) 个元.

定义 B.2.2　X 称为仿紧空间 [95], 若 X 的每一开覆盖存在局部有限的开加细.

紧空间 $\Rightarrow$ 仿紧空间 $\Rightarrow$ 正规空间. 1940 年 Tukey[388] 借用正规覆盖的概念引入了与仿紧空间相类似的空间: 完满正规空间, 证明了度量空间是完满正规空间. 1948 年 Stone[362] 证明了完满正规空间等价于仿紧空间, 于是度量空间是仿紧空间. 仿紧空间是介于度量空间、紧空间与正规空间之间的空间类. 杨忠道 [406]、高国士 [119] 等关注仿紧空间的性质.

可数紧的仿紧空间是紧空间. 这一命题蕴涵了一般性的问题: 怎样的可数紧空间是紧空间? Arens 和 Dugundji[16] 利用点有限集族引进了亚紧 (或弱仿紧) 空间, 并且证明了亚紧的可数紧空间是紧空间.

定义 B.2.3　X 称为亚紧空间, 若 X 的每一开覆盖存在点有限的开加细.

仿紧性、亚紧性等这些由开覆盖及其加细定义的拓扑性质统称为覆盖性质.

B.2.2　度量化问题

鉴于度量空间在数学的众多领域中所起的作用, 研究一般拓扑空间的度量化定理具有重要的意义.

定义 B.2.4　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的离散集族 [53], 若 X 的每一点存在邻域仅与 $\mathscr{P}$ 中至多一个元相交. 设 Φ 是一集族性质, X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 σ-Φ 集族, 若 $\mathscr{P}$ 是 X 中可数个具有 Φ 性质的集族之并.

σ 离散集族, σ 局部有限集族都是可数集族的推广. 利用这些概念, Bing[53], Nagata[311], Smirnov[354] 得到了一般拓扑学中卓越的度量化定理.

定理 B.2.5 (Bing-Nagata-Smirnov *度量化定理*)　正则空间 X 可度量的充要条件是 X 满足下述条件之一:

(1) X 具有 σ 离散基;

(2) X 具有 σ 局部有限基.

与此相仿, 1964 年王戍堂 [393] 给出了 ω_μ 可度量空间的第一个充要条件: 正则空间 X 是 ω_μ 可度量的当且仅当 X 具有 ω_μ 基. Morita, Hanai[304], Stone[363] 独立地证明了逆紧映射保持可度量性. 若干年后, 人们对度量性进行了种种的一般化, 由 Hanai-Morita-Stone 定理的激发, 拓扑学家们广泛研究了度量空间映象的可度量化问题, 或被逆紧映射保持的拓扑性质. 如, 1964 年刘应明和刘立榆 [264] 证明了两度量空间的粘着空间是可度量的当且仅当它是第一可数空间.

度量化问题并不由于已得到一般空间的度量化定理而宣告彻底解决. 从某种

意义上说, 一般空间的度量化定理仅仅是为了得到具有特定拓扑性质空间的度量化定理的桥梁, 因为特殊空间的度量化问题还远未解决, 并且在实际的应用中显得更加的重要. 许多经典的度量化问题, 如 1923 年提出的 Alexandroff[6] 问题 (完正规的拓扑流形是否可度量), Jones[186] 提出的正规 Moore 空间猜测 (正规 Moore 空间是可度量空间), 一直困惑并激励着当代的一般拓扑学家, 其意义是不容置疑的. 仅正规 Moore 空间猜测就支配了半个世纪来度量化问题的研究, 促使一般拓扑学中相关领域的进展. Bing[53] 关于拓扑空间度量化的著名论文, 定义了集态正规性, 部分回答了正规 Moore 空间猜测. 围绕这一猜测, Alexandroff[2] 引进了一致基的概念.

定义 B.2.6 空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 称为一致的, 如果对 $x \in U \in \tau, \{B \in \mathscr{B} : x \in B \not\subset U\}$ 是有限的.

Alexandroff 猜测: 具有一致基的正规空间是可度量空间. Heath[151] 提出 Alexandroff 猜测的另一形式: 亚紧的正规 Moore 空间是可度量空间. 作为一致基空间的推广, Arhangel'skiĭ[21] 引进了 BCO (即 base of countable order) 空间.

定义 B.2.7 空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 称为 BCO, 如果对 $x \in X$, 若 $\{B_i\}$ 是 $\mathscr{B}$ 中含 x 的严格递减的集列, 则 $\{B_i\}$ 是 x 在 X 的邻域基.

可展空间是 BCO 空间, 并且仿紧 BCO 空间是可度量空间. 然而, 集态正规的 BCO 空间未必是可度量空间. 一致基空间的另一推广是具有 σ 点有限基的空间[21]. 尽管具有 σ 点有限基的仿紧空间未必是可度量空间, 但是具有 σ 点有限基的集态正规的 perfect 空间是可度量空间. 与此相关的是 Heath[164] 提出的经典问题 [322]: 具有点可数基的 perfectly 正规的仿紧空间是否是可度量空间? 1991 年 Todorčevič[387] 否定了这一问题.

人们对仿紧性倾注巨大的热情是与 20 世纪 50 年代得到一系列关于仿紧空间的基本特征分不开的. 对仿紧性研究的重大突破是 Michael[274~276] 利用离散集族、局部有限集族、闭包保持集族以及垫状集族给出仿紧性的优美刻画.

定义 B.2.8 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的闭包保持集族 [275], 如果对 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$, 有 $\overline{\cup\mathscr{P}'} = \cup\overline{\mathscr{P}'}$; 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的覆盖, $\mathscr{B}$ 称为 $\mathscr{P}$ 的垫状加细 [276], 如果对 $B \in \mathscr{B}$, 存在 $P_B \in \mathscr{P}$, 满足对 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$, 有 $\overline{\cup\mathscr{B}'} \subset \cup\{P_B : B \in \mathscr{B}'\}$.

定理 B.2.9 下述条件等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的任一开覆盖有局部有限闭加细;

(3) X 的任一开覆盖有闭包保持闭加细;

(4) X 的任一开覆盖有垫状加细.

如果再设 X 是正则空间, 它们也与下述条件等价:

(5) X 的任一开覆盖有 σ 离散开加细;

(6) X 的任一开覆盖有 σ 局部有限开加细;

(7) X 的任一开覆盖有 σ 闭包保持开加细;

(8) X 的任一开覆盖有 σ 垫状开加细.

定理 B.2.9 的直接推论是闭映射保持仿紧性[275]. 这是研究闭映射是否保持特定的覆盖性质这一问题的开端. 受 Michael 关于仿紧性刻画的启示, 联系 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理, Ceder[79] 在题为 "度量空间的某些推广" 的经典论文中引进了 M_i 空间 $(i=1,2,3)$.

定义 B.2.10　设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的集对 $B=(B_1,B_2)$ 的集族. $\mathscr{B}$ 称为 X 的对基, 如果对 $B\in\mathscr{B}$ 有 $B_1\in\tau$, 并且若 $x\in U\in\tau$, 则存在 $B\in\mathscr{B}$, 使 $x\in B_1\subset B_2\subset U$. $\mathscr{B}$ 称为 X 的垫状集族, 如果对 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$ 有 $\overline{\cup\{B_1:B\in\mathscr{B}'\}}\subset\cup\{B_2:B\in\mathscr{B}'\}$. X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的拟基, 如果 $\{(P^\circ,P):P\in\mathscr{P}\}$ 是 X 的对基.

定义 B.2.11　设 X 是正则空间. X 称为 M_1 空间, 如果 X 具有 σ 闭包保持基; X 称为 M_2 空间, 如果 X 具有 σ 闭包保持拟基; X 称为 M_3 空间, 如果 X 具有 σ 垫状基.

M_1 空间 $\Rightarrow$ M_2 空间 $\Rightarrow$ M_3 空间. 但是, M_3 空间是否是 M_2 空间? M_2 空间是否是 M_1 空间? 这是 Ceder 提出的著名问题. Ceder 的论文揭开了广义度量空间研究的序幕. M_i 空间的研究是广义度量空间理论发展的主线索之一.

B.2.3　积空间的仿紧性

Dieudonné[95] 在证明了紧空间与仿紧空间之积空间是仿紧空间之后问: 两仿紧空间之积空间是否是仿紧空间? Sorgenfrey[359] 构造了一个仿紧空间 (后称为 Sorgenfrey直线), 使其自乘甚至不是正规空间. 与度量空间或紧空间比较, 仿紧空间的致命缺陷在于两仿紧空间之积空间未必是仿紧空间. Dowker[98] 和 Katětov[196] 独立引进可数仿紧空间以讨论积空间的正规性.

定义 B.2.12　X 称为可数仿紧空间, 如果 X 的每一可数开覆盖有局部有限的开加细.

Dowker 证明了正规空间是可数仿紧空间当且仅当它与单位闭区间 $\mathbb{I}$ 之积空间是正规空间. Dowker 在讨论了正规性与可数仿紧性之间的精密关系之后提出问题: 是否存在非可数仿紧的正规空间? 这种称之为 Dowker 空间的例子直到 1971 年才由 Rudin[339] 做出.

Michael[274] 问: 仿紧空间与度量空间之积空间是否是仿紧空间? 10 年后 Michael[278] 构造了一个仿紧空间 (后称为 Michael直线), 使它与一可分度量空间之积空间不是正规空间. Tamano[368] 提出, 对空间 X 寻找一个充要条件, 使对任何度量空间 Y, $X\times Y$ 是正规空间. Morita[301] 的论文给 Tamano 问题一个合适

的解.

定义 B.2.13 X 称为 P 空间 (或 Morita 空间), 如果 X 的开集族 $\{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_i):\alpha_1,\cdots,\alpha_i\in\Omega,i\in\mathbb{N}\}$ 满足 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)\subset G(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i+1})$, 那么有 X 的闭集族 $\{F(\alpha_1,\cdots,\alpha_i):\alpha_1,\cdots,\alpha_i\in\Omega,i\in\mathbb{N}\}$ 具下述性质:

(1) $F(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)\subset G(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$;

(2) 如果 Ω 的序列 $\{\alpha_i\}$, 使 $X=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}G(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$, 则 $X=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$.

Morita 证明了 X 是正规 P 空间当且仅当 X 与任一度量空间之积空间是正规空间. Frolík[117] 证明了可数个 Čech 完全的 (Čech-complete) 仿紧空间之积空间是仿紧空间. Frolík 的定理无疑是积空间仿紧性的第一个令人满意的结果. 它的不足之处在于度量空间未必是 Čech 完全空间. 减弱 Čech 完全性的尝试首先由 Morita[301] 通过定义 M 空间实现.

定义 B.2.14 X 称为 M 空间, 如果 X 存在开覆盖的正规序列 $\{\mathscr{U}_i\}$ 满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_i\}$, 若 $x_i\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_i)$, 则 $\{x_i\}$ 在 X 中有聚点.

可数紧空间, 度量空间以及 Čech 完全的仿紧空间都是 M 空间, 而 M 空间是 P 空间. 可数个仿紧 M 空间之积空间是仿紧 M 空间.

上述论述是基于可度量性是可数可积性展开的. 对度量空间不可数积的正规性, Stone[362] 得到了一些等价条件.

定理 B.2.15 对非空度量空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 下述条件等价:

(1) $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是正规空间;

(2) $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是仿紧空间;

(3) Λ 中至多可数个 α, 使 X_α 不是紧空间.

由此, $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ 不是正规空间. 人们把研究不可数无限积的正规性或仿紧性的兴趣转移为求积空间的适当子空间的正规性或仿紧性. 这种思想导致了 Corson[92] 提出 σ 积和 Σ 积的概念, 以分别作为有限积和可数积的推广.

定义 B.2.16 设 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是无限积空间. 取定 $b=(b_\alpha)\in X$. 对 $x\in X$, 记 $\mathrm{supp}(x)=\{\alpha\in\Lambda:x_\alpha\neq b_\alpha\}$, 置

$$\sigma(b)=\{x\in X:|\mathrm{supp}(x)|<\aleph_0\},$$
$$\sum(b)=\{x\in X:|\mathrm{supp}(x)|\leqslant\aleph_0\}.$$

那么 X 的子空间 $\sigma(b),\Sigma(b)$ 分别称为以 b 为基点的空间族 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的 σ 积和 Σ 积. 一般地, 它们分别记为 $\sigma\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 和 $\Sigma\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$.

Corson 证明了可分度量空间族的 σ 积是 Lindelöf 空间, 完全度量空间族的 Σ 积是正规空间. 度量空间族的 Σ 积是否是正规空间成为了一个具有吸引力的著名问题. 1977 年 Gul'ko[144] 正面地回答了这一问题, 1983 年 Rudin[343] 证明了度量空间族的 Σ 积是可缩空间.

B.2.4 空间与分类

事实表明, 一般拓扑学家早期关于连续函数、商映射、开映射以及闭映射等的工作已成为该学科向前发展的动力. 自 1944 年以来, 一些更强有力的映射不断涌现, 如紧映射 (Vaĭnšteĭn, 1947), 逆紧映射 (Vaĭnšteĭn, 1947), π 映射 (Ponomarev, 1960), 伪开映射 (Arhangel'skiĭ, 1963), 紧覆盖映射 (Michael, 1966) 等. 映射与空间是互相依存的关系, 所以映射类的丰富势必要讨论它与空间的纽带作用. 1961 年对一般拓扑学发展产生巨大影响的重要事件是, 在布拉格召开了第一次名为 "一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系" 的国际学术讨论会 (以后每 5 年召开一次). 在这次会议上, Alexandroff[3] 提出了用映射来研究空间的设想, 即将各式各样的空间类通过映射作为纽带将它们联系在一起, 然后按空间类与映射类之间的不同而分门别类地进行研究. Alexandroff 设想是有实例作为依据的. 例如, Gale[118] 把 k 空间刻画为局部紧空间的商映象; Ponomarev[333] 把第一可数空间刻画为度量空间的开映象; Frolík[117] 把 Čech 完全的仿紧空间刻画为完全度量空间的逆紧逆象. Alexandroff 还提出猜想: 仿紧空间刻画了度量空间的逆紧逆象. 虽然这是不正确的, 但它引导 Arhangel'skiĭ[19] 引进 p 空间的概念.

定义 B.2.17 完全正则空间 X 称为 p 空间, 如果 βX 中存在覆盖 X 的开集族列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足对 $x \in X$, 有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset X$. $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的 pluming.

Čech 完全空间, 完全正则的 Moore 空间都是 p 空间. Arhangel'skiĭ 把度量空间的逆紧逆象刻画为仿紧 p 空间. p 空间的重要作用还表现在可数个 (仿紧) p 空间的积空间是 (仿紧) p 空间. 虽然 p 空间与 M 空间互不蕴涵, 但是仿紧 p 空间类却重合于仿紧 M 空间类. 总之, Alexandroff 关于映射与空间的相互分类原则已成为一般拓扑学进一步研究的重要源泉, 并在许多具体的空间类上实现. 例如,

(1) Ponomarev[333] 用度量空间的开 s 映象刻画了具有点可数基的空间;

(2) Arhangel'skiĭ[18] 用度量空间的开紧映象刻画了具有一致基的空间;

(3) Arhangel'skiĭ[20] 用度量空间的伪开映象刻画了 Fréchet 空间;

(4) Morita[301] 用度量空间的逆可数紧逆象刻画了 M 空间;

(5) Franklin[115] 用度量空间的商映象刻画了序列空间;

(6) Heath[153] 用度量空间的开 π 映象刻画了可展空间.

由前所述, 1944 ~ 1964年 20 年间一般拓扑学的发展为广义度量性质的研究奠定了牢固的基础, 确立了广义度量性质的研究框架. 有目的地应用离散集族、局部有限集族、闭包保持集族等来处理空间集族的不可数情形是这时期研究的主要特点. 仿紧性的引入, 将许多原来适合于紧空间或度量空间的重要定理拓广到仿紧空间 (这种推广往往是本质的), 而且仿紧空间的许多良好性质在一般拓扑学以外的众多领域中得到了应用, 加速了一般拓扑学作为一基础分支向其它领域的渗透. 成

功地给出一般空间的度量化定理, 使人们更加深刻地认识到度量空间的本质属性, 为如何更深入和细致地探讨度量性质展示了光明的前景. 更重要的是, 避免了寻求特定拓扑空间度量化过程中构造距离函数的困难与繁杂, 同时有利于人们对度量性质进行各式各样的推广和应用. 挖掘仿紧空间的性质以及得到进一步的度量化定理是这一时期的中心课题. 拓扑学家已把早期集中于紧空间和度量空间的兴趣与注意力渐渐转移到仿紧空间及度量空间的推广空间上. 确切地说, 学者们不约而同地将精力集中于如下四类问题:

(1) 在具有怎样更弱拓扑性质的空间类中可数紧性与紧性相互等价?

(2) 在怎样更一般的空间类中仿紧性关于可数积封闭?

(3) 进一步挖掘具有特定拓扑性质空间的度量化定理.

(4) 利用映射对空间进行分类.

B.3 形成时期

1965 ~ 1966 年, Arhangel'skiĭ, Borges, Michael, Wicke 和 Worrell 等, 发表了一批重要的论文, 把一般拓扑学的研究带入蓬勃发展阶段, 并形成了广义度量空间理论.

B.3.1 等紧性与正规性

Bacon[42] 称空间 X 的等紧的, 如果它的任一闭可数紧子空间是紧空间.

奠基时期的工作表明, 可展空间在度量化问题中的作用. 可展空间具有怎样的覆盖性质与基性质? Worrell 和 Wicke[400] 发表的 "可展拓扑空间的特征" 是关于可展空间最优秀的论文. 他们引入的 θ 可加细性质和 θ 基的概念给上述问题一个满意的回答.

定义 B.3.1 X 称为 θ 可加细空间, 如果 X 的任一开覆盖存在开加细序列 $\{\mathscr{U}_i\}$, 使对 $x \in X$ 有 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{U}_i) < \aleph_0$, 其中 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{U}_i) = |\{U \in \mathscr{U}_i : x \in U\}|$.

定义 B.3.2 X 的开集族 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_i$ 称为 X 的 θ 基, 如果对 $x \in U \in \tau$, 存在 $i \in \mathbb{N}$ 和 $B \in \mathscr{B}_i$, 满足 $x \in B \subset U$ 且 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{B}_i) < \aleph_0$.

可展空间具有 θ 可加细性质和 θ 基性质, 并且可展空间等价于 θ 可加细的 BCO 空间. 1977 年刘应明 [263] 引进了狭义拟仿紧空间. θ 可加细空间 $\Rightarrow$ 狭义拟仿紧空间 $\Rightarrow$ 等紧空间. 1976 年 Reed 和 Zenor[338] 证明了正规可展的流形是可度量的, 开辟了拓扑流形度量化问题实质性的研究路径.

稍为修改可展空间的定义, 1968 年 Bennett[47] 定义了拟可展空间.

定义 B.3.3 X 称为拟可展空间, 如果存在 X 的开集族的序列 $\{\mathscr{B}_i\}$, 使对 $x \in X$, $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{B}_i) : i \in \mathbb{N},\ \mathrm{st}(x, \mathscr{B}_i) \neq \varnothing\}$ 是 x 在 X 的邻域基.

与可展空间不同的是, 拟可展的仿紧空间未必是可度量空间, 但是可展空间可分解为 perfect 的拟可展空间. Bennett 和 Lutzer[51] 证明了拟可展性等价于 θ 基性质. Smith[356] 肯定地回答了 Bennett[49] 的问题: 拟可展空间是等紧空间吗?

点可数基与 θ 基是互不蕴涵的. 如果将 θ 基定义中的条件 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{U}_i) < \aleph_0$ 换为 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{U}_i) \leqslant \aleph_0$, 那么所产生的拓扑性质是 Aull[37] 定义的 $\delta\theta$ 基. 显然, 具有点可数基与 θ 基的空间都具有 $\delta\theta$ 基. 许多关于点可数基或 θ 基的结论适用于 $\delta\theta$ 基的空间. 如, 具有 $\delta\theta$ 基的空间是等紧空间.

Arhangel'skiĭ 和 Projzvolov[34] 在讨论紧空间的度量化过程中, 引进了 p 基的概念, 同时证明了具有点可数 p 基的紧空间是可度量空间.

定义 B.3.4 X 的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的 p 基, 如果对 $x \neq y \in X$, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B \subset X - \{y\}$.

Shiraki[348] 指出, 具有点可数 p 基的空间是等紧空间.

定义 B.3.5 X 称为具有 G_δ 对角线 [79], 如果存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使对 $x \in X$ 有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \{x\}$. 若将上述开覆盖列改为开集族的序列, 所定义的空间称为具有拟 G_δ 对角线 [165].

Šneĭder[358] 证明了具有 G_δ 对角线的紧空间是可度量空间. Anderson[12], Bennett[49] 和 Heath[157] 都问过是否具有 G_δ 对角线或拟 G_δ 对角线的可数紧空间是紧空间? Chaber[80] 肯定地回答了这一问题. Bennett, Byerly 和 Lutzer[50] 还证明了下述更有力的结果.

定理 B.3.6 具有拟 G_δ 对角线的可数紧空间是紧可度量空间.

至此, 关于广义度量等紧性的研究可暂告一段落. 在覆盖性质方面较好的结果是 Uspenskii[389] 证明了 σ 亚紧的伪紧空间是紧空间. 等紧空间具有怎样的内部特征还是一个尚未解决的问题.

积空间的正规性与仿紧性是一对孪生兄弟, 但前者显得更加本质和困难. 20 世纪 50 年代 Dowker、60 年代 Morita 等, 关于该课题的出色工作为人们进一步探讨起了抛砖引玉的作用. 1969 年 Nagata[312] 证明了空间 X 是仿紧 M 空间当且仅当 X 同胚于度量空间与紧空间积空间的闭子空间. 进入 20 世纪 70 年代, 优秀的结果层出不穷. Rudin[340] 证明了对每一非离散空间 Y, 必存在正规空间 X, 使 $X \times Y$ 不是正规空间. 在 Rudin 和 Starbird[344] 工作的基础上, Przymusińsky[336] 仔细研究了与紧因子或度量因子积的正规性问题, 给出其积是正规空间的充要条件, 使一系列结果成为它的推论. 1977 年 Burke 和 van Douwen[73], Kato[198] 独立地构造了 M 空间 X, 使 X 不同胚于度量空间与可数紧空间积空间的闭子空间. 积

空间正规性的另一线索是 Morita[303] 猜测.

猜测 B.3.7 下述命题成立:

(1) X 是离散空间当且仅当对任一正规空间 Y, $X \times Y$ 是正规空间;

(2) X 是度量空间当且仅当对任一正规 P 空间 Y, $X \times Y$ 是正规空间;

(3) X 是 σ 局部紧的度量空间当且仅当对任一正规, 可数仿紧空间 Y, $X \times Y$ 是正规空间.

Rudin[342] 证实了猜测 (1). Morita[303] 证明了如果猜测 (2) 的回答是肯定的, 则猜测 (3) 就是正确的. 2001 年 Balogh[45] 证明了猜测 (2) .

下面介绍 Σ 积的正规性. 紧空间的 Σ 积未必是正规空间 (见定理 B.3.8). 因此, 讨论 Σ 积正规性一般假定因子空间是某种的广义度量空间. Kombarev[206] 得到了仿紧 p 空间 Σ 积正规性的充要条件.

定理 B.3.8 设 $X = \Sigma\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 其中 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是仿紧 p 空间族. 下述条件等价:

(1) X 是正规空间;

(2) X 是集态正规空间;

(3) X 具有可数 tightness;

(4) 每一 X_α 具有可数 tightness.

与可数积仿紧性相类比, 定理 B.3.8 启发人们讨论仿紧 Σ 空间类 Σ 积的正规性. Yajima[402] 证明了 M_1 空间族的 Σ 积未必是正规空间. 1995 年 Eda, Gruenhage, Koszmider, Tamano 和 Todorčevič[100] 证明了在假设 CH 下, Lašnev 空间 S_{ω_2} 的 Σ 积不是正规空间. 滕辉 [384] 证明了半层空间族的 Σ 积是集态次正规空间.

B.3.2 基的推广 —— 网

由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理, 诱发了人们对具有各种基性质空间的热情. 然而, 由基所定义的空间的不足之一在于, 考虑一些与 “闭” 性有关的运算时会带来诸多不便, 有时甚至很困难. 因而有必要对基的概念作适当的推广. Arhangel'skiĭ[17] 为证明任意基数的 Alexandroff-Urysohn 加法定理时作了成功的尝试.

定义 B.3.9 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的网, 如果 X 的任一开集是 $\mathscr{P}$ 的某子集之并.

Arhangel'skiĭ 讨论了可数网空间的性质. Michael[280] 证明了可分度量空间的映象恰好是具有可数网的空间, 由此定义 cosmic 空间为具有可数网的正则空间. 为讨论可分度量空间的商映象, Michael[280] 引进了伪基的概念.

定义 B.3.10 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的伪基, 如果对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $K \subset P \subset U$. 具有可数伪基的正则空间称为 $\aleph_0$ 空间.

$\aleph_0$ 空间可以刻画为可分度量空间的紧覆盖正则映象. 然而, 度量空间未必是 $\aleph_0$ 空间. O'Meara[325] 引进了 k 网的概念, 作为基和伪基的共同推广.

定义 B.3.11 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k 网, 如果对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限集 $\mathscr{P}'$, 使 $K \subset \cup\mathscr{P}' \subset U$. 具有 σ 局部有限 k 网的正则空间称为 $\aleph$ 空间.

$\aleph$ 空间推广了度量空间和 $\aleph_0$ 空间. 借助网的概念, Okuyama[323] 定义了 σ 空间, 它推广了 $\aleph$ 空间和 cosmic 空间.

定义 B.3.12 具有 σ 局部有限网的正则空间称为 σ 空间.

Okuyama 在研究了 σ 空间的一些基本性质后, 提出两个问题:

(1) 具有 σ 闭包保持网的正则空间是否是 σ 空间?

(2) σ 空间的正则闭映象是否是 σ 空间?

Siwiec 和 Nagata[352] 证明了 σ 空间的优美的特征定理, 解决了 Okuyama 的两个问题.

定理 B.3.13 (Nagata-Siwiec 定理) 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是 σ 空间;

(2) X 具有 σ 离散网;

(3) X 具有 σ 闭包保持网.

从 Michael 的仿紧空间刻画, Ceder 的 M_i 空间问题及 Nagata-Siwiec 定理, 人们自然很关心 σ 空间与具有 σ 垫状网的正则空间是否等价? 为了更明了地表述这一问题, 介绍 Borges[56] 关于 M_3 空间的创新性工作.

定义 B.3.14 X 称为层空间, 如果 X 存在函数 $G: \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$ 满足:

(1) $H \subset G(n, H)$ 且 $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n, H)}$;

(2) $H \subset F \Rightarrow G(n, H) \subset G(n, F)$.

层空间等价于 M_3 空间. 由此, Borges 解决了 Ceder[79] 提出的关于 M_i 空间的部分问题, 如闭映射保持 M_3 空间. 1967 年 Michael 定义了半层空间 [94].

定义 B.3.15 X 称为半层空间, 如果 X 存在函数 $G: \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$ 满足:

(1) $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n, H)$;

(2) $H \subset F \Rightarrow G(n, H) \subset G(n, F)$.

Creede[93, 94] 系统地研究了半层空间. 层空间, σ 空间以及半度量空间都是半层空间. Kofner[203] 将具有 σ 垫状网的空间命名为伪层空间, 证明了伪层空间等价于半层空间, 同时构造了非 σ 空间的正则 Lindelöf 的伪层空间.

Okuyama[323] 关于 σ 空间的第一篇论文证明了仿紧 σ 空间关于可数积封闭. 由于 (仿紧) M 空间与 (仿紧) σ 空间互不蕴涵, 因而 σ 空间出现后遇到的另一个问题是, 寻找同时含于 M 空间和 σ 空间的空间类, 使在该类上仿紧性关于可数积封闭. Nagami[309] 成功地引进了适合上述要求的 Σ 空间类.

定义 B.3.16　设 $\mathscr{P}$ 是 X 的覆盖. 对 $x\in X$, 令 $C(\mathscr{P},x)=\cap(\mathscr{P})_x$. X 的 Σ 网是指 X 的局部有限的闭覆盖列 $\{\mathscr{P}_i\}$ 满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_i\}$, 若 $x_i\in C(\mathscr{P}_i,x)$, 则 $\{x_i\}$ 在 X 中有聚点. 具有 Σ 网的空间称为 Σ 空间. 对此 Σ 网, 置

$$C(x)=\cap\{C(\mathscr{P}_i,x):i\in\mathbb{N}\},x\in X.$$

那么 $C(x)$ 是 X 的可数紧的闭集. 当每一 $C(x)$ 是 X 的紧集时, $\{\mathscr{P}_i\}$ 称为 X 的强 Σ 网, X 称为强 Σ 空间.

M 空间, σ 空间都是 Σ 空间, Σ 空间是 P 空间, 并且仿紧 Σ 空间关于可数积封闭. Nagami 证明了逆紧映射保持 Σ 空间. 但是, Michael[282] 构造了局部紧仿紧空间 (因而强 Σ 空间), 使它的闭映象不是 Σ 空间. 鉴于此, Michael[282] 引进了强 $\Sigma^\sharp$ 空间.

定义 B.3.17　X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 (mod$k$) 网, 如果存在 X 的由某些紧集组成的覆盖 $\mathscr{K}$ 满足: 对 $K\in\mathscr{K},\{P\in\mathscr{P}:K\subset P\}$ 是 K 在 X 中的网.

强 Σ 空间等价于具有 σ 局部有限闭 (mod$k$) 网的空间. Michael[282] 称具有 σ 闭包保持闭 (mod$k$) 网的空间为强 $\Sigma^\sharp$ 空间, 显然, 闭映射保持强 $\Sigma^\sharp$ 空间. Michael 进一步指出, 强 $\Sigma^\sharp$ 空间是否有继续深入研究的价值, 取决于仿紧强 $\Sigma^\sharp$ 空间是否关于可数积封闭. 1984 年 Patsei[327] 肯定地回答了这一问题. Okuyama[324] 系统地研究了与强 Σ 空间相关的一些空间类. 为了便于统一叙述, 在 (mod$k$) 网的定义中将 $\mathscr{K}$ 改为由 X 的某些闭可数紧集组成的覆盖, 那么 $\mathscr{P}$ 称为 X 的拟 (mod$k$) 网, 于是 Σ 网就是 σ 局部有限的闭拟 (mod$k$) 网.

定义 B.3.18[212]　X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的遗传闭包保持集族, 如果对 $H_P\subset P\in\mathscr{P}$, 集族 $\{H_P:P\in\mathscr{P}\}$ 是 X 的闭包保持集族.

定义 B.3.19[324]　具有 σ 遗传闭包保持闭拟 (mod$k$) 网的空间称为 Σ^* 空间; 具有 σ 闭包保持闭拟 (mod$k$) 网的空间称为 $\Sigma^\sharp$ 空间.

Σ 空间 $\Rightarrow\Sigma^*$ 空间 $\Rightarrow\Sigma^\sharp$ 空间, 相反的蕴涵关系均不成立. 闭映射保持 Σ^* 空间和 $\Sigma^\sharp$ 空间. Okuyama 证明了对仿紧空间 X, X 是 Σ 空间当且仅当 $X\times\mathbb{I}$ 是 Σ^* 空间. 值得一提的是, 半层空间类中仿紧性未必关于可数积封闭. 在假设 CH 下, Michael[283] 构造了正则遗传 Lindelöf 的半度量空间, 使其自乘不是正规空间.

开的 (mod$k$) 网称为 (mod$k$) 基 [282]. 1970 年 Lutzer 和 Michael[282] 证明了 X 是仿紧 M 空间当且仅当 X 是具有 σ 局部有限 (mod$k$) 基的正则空间.

利用基的各种形式的推广: 网, k 网, (mod$k$) 网, (mod$k$) 基, 得到了一串的广义度量空间: cosmic 空间, σ 空间, 半层空间, $\aleph$ 空间, Σ 空间等. 这自然引起两个问题:

(1) 这些空间类有怎样的度量化定理?

(2) 这些空间类有怎样的 "因子分解" 定理?

先看度量化问题. 这里集中反映于半层空间和 Σ 空间的度量化问题. 半层空间具有 G_δ 对角线, Chaber[80] 证明了具有 G_δ 对角线的 M 空间是可度量空间. 对 Σ 空间, 主要探讨怎样的 Σ 空间是 σ 空间. 这也可以被认为是 σ 空间分解定理的一种模式. Siwiec 和 Nagata[352] 定义了 p 网 (当时称为 ct 网) 和 $\sigma^\sharp$ 空间.

定义 B.3.20　X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 p 网, 如果对 $x \neq y \in X$, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P \subset X - \{y\}$. 具有 σ 闭包保持闭 p 网的空间称为 $\sigma^\sharp$ 空间.

Shiraki[348] 证明了 σ 空间可分解为正则 $\Sigma^\sharp$ 空间和 $\sigma^\sharp$ 空间, 并且具有点可数 p 基的正则 Σ 空间是 σ 空间. Burke 和 Lutzer[75] 构造了不具有点可数 p 基的 Moore 空间, 否定了 Reed[337] 提出的问题.

关于寻求广义度量空间的因子分解定理是卓有成效的. 例如,

(1) σ 空间 = 正则 c 半层空间 + $\Sigma^\sharp$ 空间 [268];

(2) 半度量空间 = 第一可数空间 + 半层空间 [94];

(3) Nagata 空间 = 第一可数空间 + 层空间 [79].

Ceder[79] 曾问: Nagata 空间是否可分解为仿紧空间和半度量空间? Heath[154] 在构造了 Ceder 问题的反例后问: 保持仿紧半度量空间是 Nagata 空间的充要条件是什么? Lutzer[265] 定义了 k 半层空间.

定义 B.3.21　正则空间 X 称为 k 半层空间, 如果 X 存在函数 $G : \mathbb{N}\times\tau^c \to \tau$, 满足半层空间的条件, 同时对 X 的紧集 K 和闭集 H, 若 $K \cap H = \varnothing$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $K \cap G(n, H) = \varnothing$.

Lutzer 证明了 Nagata 空间 = 半度量空间 + k 半层空间, 其实质是 Nagata 空间 = 第一可数空间 + k 半层空间. 这些都没能给出层空间的分解. Arhangel'skiĭ[24] 曾问: 怎样的 cosmic 空间是层空间? Heath, Lutzer 和 Zenor[160] 定义了单调正规空间, 同时证明了层空间 = 单调正规空间 + 半层空间, 度量空间 = 单调正规空间 + p 空间 + G_δ 对角线.

定义 B.3.22　X 称为单调正规空间, 如果对 X 中不相交的闭集 H, F, 存在 X 的开集 $D(H, F)$ 满足:

(1) $H \subset D(H, F) \subset \overline{D(H, F)} \subset X - F$;

(2) $H \subset H', F \supset F' \Rightarrow D(H, F) \subset D(H', F')$.

关于 M_i 空间问题, Gruenhage[139] 和 Junnila[188] 独立地证明了 $\mathrm{M}_3=\mathrm{M}_2$. 此后, 是否 M_3 空间是 M_1 取得了很多进展. 如连续函数空间 $C_k(\mathbb{P})$ 是层空间 [132]. 如能证明 $C_k(\mathbb{P})$ 不是 M_1 空间, 则 M_i 空间问题全部解决.

B.3.3 Alexandroff 设想

Alexandroff[3] 提出的用映射对空间进行分类的设想已在许多具体的空间上实现. 然而, 这些研究并不具有系统性. 1966 年, Arhangel'skiĭ[24] 发表了历史性的文献 "映射与空间", 开创了用映射研究空间的新纪元. 它较系统地总结了一般拓扑学发展半个世纪来, 人们在映射理论方面取得的重要成果, 更重要的是对如何借助映射来研究各式各样的空间给出了具体的问题. 由此形成 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 问题, 其核心内容是用映射建立度量空间类与具有确定拓扑性质的空间类之间的关系. 这些问题是对一般拓扑学的突出贡献, 使映射与空间的分类设想成为广义度量空间不可分割的重要组成部分 [4].

从距离函数来描述度量空间的角度看,可度量性的直接推广当推半度量性 [396] 和对称度量性 [7]. 这些是最早的广义度量性质.

定义 B.3.23[24] X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基, 如果对 $x\in X$, 存在 $\mathscr{P}_x\subset\mathscr{P}$ 满足:

(1) $x\in\cap\mathscr{P}_x, \mathscr{P}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$;

(2) $U,V\in\mathscr{P}_x\Rightarrow$ 存在 $W\in\mathscr{P}_x$, 使 $W\subset U\cap V$;

(3) F 是 X 的闭集当且仅当对 $x\in X-F$, 存在 $P\in\mathscr{P}_x$, 使 $F\cap P=\varnothing$.

X 称为 g 第一可数空间 (或 gf 可数空间), 如果存在 X 的弱基 $\mathscr{P}$, 使每一 $\mathscr{P}_x$ 是可数的.

对称度量空间是 g 第一可数空间, 而第一可数空间 = g 第一可数空间 + Fréchet 空间. 利用对称度量可得到比半度量更广泛的度量化定理, 而且有效地刻画了度量空间特定的商映象, 例如

(1) X 是度量空间的商 π 映象当且仅当 X 是满足弱 Cauchy 条件的对称度量空间 [204];

(2) X 是度量空间的伪开 π 映象当且仅当 X 是半度量空间 [1, 67].

弱基作为基的一种推广为人们研究更一般的广义度量空间提供了一种途径. 如, Siwiec[351] 利用弱基定义了 g 可度量空间: 具有 σ 局部有限弱基的正则空间. 1982 年 Foged[109] 证明了 g 可度量空间具有 σ 离散弱基, 回答了 Siwiec 的问题. 2005 年刘川 [256] 证明了 g 可度量空间等价于具有 σ 遗传闭包保持弱基的正则空间, 回答了 Tanaka 的问题. 至于具有 σ 紧有限弱基的正则空间是否是 g 可度量的还是一个尚未解决的问题 [252].

研究度量空间的一个有力结果是度量性蕴涵仿紧性. 作为度量空间重要推广

的可展空间未必是亚紧空间. 除了 θ 可加细性质外, 可展空间是否还有与度量空间相平行的其他覆盖性质? Arhangel'skiĭ[24] 定义了 σ 仿紧空间.

定义 B.3.24 X 称为 σ 仿紧空间, 如果 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在开加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足: 对 $x \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $U \in \mathscr{U}$, 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U$.

在研究半度量空间时, McAuley[273] 发现半度量性蕴涵所谓的 F_σ-screenable 性质: 空间的任一开覆盖存在 σ 离散的闭加细.

Burke[64] 建立了这些性质之间的精确关系.

定理 B.3.25 下述条件等价:

(1) X 是 σ 仿紧空间;

(2) X 是 F_σ-screenable 空间;

(3) X 的任一开覆盖有 σ 局部有限闭加细;

(4) X 的任一开覆盖有 σ 闭包保持闭加细.

Burke 将具有上述性质之一的空间称为次仿紧空间. 亚紧性与次仿紧性是互不蕴涵的, 而次仿紧空间是 θ 可加细空间. Burke[65] 和 Katuta[199] 问: 任一开覆盖具有 σ 垫状加细的空间是否是次仿紧空间? 1978 年 Junnila[189] 肯定地回答了这一问题.

尽管仿紧 p 空间刻画了度量空间的逆紧逆象, 但是 Arhangel'skiĭ[24] 已说明 p 空间未必是可展空间的逆紧逆象. 与此相关, Arhangel'skiĭ[19] 引进了严格 p 空间.

定义 B.3.26 完全正则空间 X 称为严格 p 空间, 如果 βX 中存在覆盖 X 的开集族的序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 满足 p 空间的条件, 并且对 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $\overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m)} \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$.

严格 p 空间严格地强于 p 空间. Burke[66] 证明了 θ 可加细的 p 空间是严格 p 空间. Burke[69] 提出问题: 严格 p 空间是否是 θ 可加细空间? 1986 年江守礼 [185] 肯定地回答了这一问题. 另一方面, 可展空间的完全正则逆紧逆象是次仿紧的 p 空间, Isiwata[178] 构造例子说明其逆命题是不正确的, 并描述了可展空间的逆紧逆象. Suzuki[367] 刻画了 σ 空间的逆紧逆象.

仿紧空间的闭映象是仿紧空间, 但是度量空间的闭映象却未必是度量空间. Arhangel'skiĭ[24] 问: 度量空间的闭映象具有怎样的内部特征? Lašnev[212] 首先研究了这个问题, 后人称度量空间的闭映象为 Lašnev 空间. Slaughter[353] 证明了 Lašnev 空间是 M_1 空间. 遗传闭包保持集族 (定义 B.3.18) 正是 Lašnev 在研究度量空间闭映象问题时引进的. 他将度量空间的闭映象刻画为具有遗传闭包保持覆盖的几乎加细序列组成网的 Fréchet 空间. 这个刻画中重要的是遗传闭包保持概念的提出. 如, Morita 和 Rishel[306] 用 Lašnev 的方法给出 (仿紧) M 空间闭映象的特征; Okuyama[324] 的 Σ^* 空间是以遗传闭包保持集族为基础建立的. 更为有趣的

是, Burke, Engelking 和 Lutzer[74] 建立了一个新颖的度量化定理.

定理 B.3.27 (Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理) X 是可度量空间当且仅当 X 是具有 σ 遗传闭包保持基的正则空间.

逆紧映射保持可度量性. 逆紧映射也保持仿紧 M 空间. 但是逆紧映射未必保持 M 空间 [302].

定义 B.3.28[174] X 称为 M* 空间, 如果存在 X 的局部有限的闭覆盖列 $\{\mathscr{F}_i\}$ 满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_i\}$, 若 $x_i \in \mathrm{st}(x, \mathscr{F}_i)$, 那么 $\{x_i\}$ 在 X 中有聚点.

Morita, Rishel[306] 和 Nagata[313] 都证明了 M 空间的逆紧映象恰好是 M* 空间. 如果将 M* 空间定义中的 “局部有限” 换为 “闭包保持”, 那么所描述的空间是 Siwiec 和 Nagata[352] 定义的 M$^\sharp$ 空间. Morita 和 Rishel[306] 提出的是否 M$^\sharp$ 空间是 M* 空间这一问题至今尚未解决.

以上, 侧重讨论空间的闭映象. 对空间的开映象的研究同样触发了广义度量空间许多深刻的工作. 最著名的是 Arhangel'skiĭ[24] 的 MOBI 类和 Michael[285] 的五种商映射.

定义 B.3.29 MOBI 类是满足如下两个条件的极小空间类:

(1) 度量空间属于这个类;

(2) 这个类关于开紧映射封闭.

一个至今尚未解决的问题: MOBI 类具有怎样的内部特征? 第一个实质性的进展应是 Bennett[48] 的定理.

定理 B.3.30 X 属于 MOBI 类当且仅当存在度量空间 M 和开紧映射的有限集 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$, 使 $X = f_n \circ f_{n-1} \cdots \circ f_1(M)$.

Bennett 定理建立了 MOBI 类、度量空间类以及开紧映射类这三者之间的一个精细关系. 20 世纪 70 至 80 年代的 20 年间, 人们研究 MOBI 类无一不是从 Bennett 的定理作为一个基点. 由此可知, MOBI 类中的空间具有点可数基 [24]. 经过一系列工作, Arhangel'skiĭ 当年提出的问题大都被否定回答. 如, Chaber[86] 证明了 MOBI 类中的空间既可以不是弱 θ 可加细空间, 又可以不是 $\sigma^\sharp$ 空间. 但是逆紧映射是否保持 MOBI 类, 完全正则的亚紧空间是否是仿紧空间的开紧映象等还是尚未解决的困难问题 [28].

商映射是一类较弱的映射类, 所以度量空间特定的商映象备受关注.如, Arhangel'skiĭ[24] 提出寻求度量空间的商 s 映象的内在刻画; Michael 和 Nagami[289] 问度量空间的商 s 映象是否是度量空间的紧覆盖的商 s 映象? 前一问题 Hoshina[167], Gruenhage, Michael 和 Tanaka[143] 给出不同的回答, 后一问题陈怀鹏 [87, 88] 否定回答. 对开映射的推广, 除了前面提到的商映射和伪开映射, 还有 Hájek[147], Michael[281] 定义的双商映射, Siwiec[350] 定义的可数双商映射.

Michael[285] 的综述报告总结了 20 世纪 50 年代至 70 年代初的工作, 系统化了局部紧度量空间、局部紧仿紧空间、可分度量空间、度量空间、仿紧 M 空间和 M 空间在开映射、双商映射、可数双商映射、伪开映射和商映射下的特征, 并且用这些空间类与映射类刻画了弱第一可数空间类.

下面以和定理为例说明映射理论的一个应用. 和定理讨论的内容是, 在什么条件下被加项的哪些拓扑性质能转移到它们的和空间上? 即, 设 $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, 其中 X 的子空间 X_α 具有拓扑性质 Φ, 在什么条件下, X 也具有性质 Φ? 这方面最简单、最原始的叙述应该是 Alexandroff 和 Urysohn[8] 给出的问题: 如果紧空间 X 可表为两个具有可数基空间的并, 那么 X 是否具有可数基? Smirnov[355] 对更一般的可数和情形给出这个问题肯定的回答. Stone[364] 研究了度量空间的和定理, 说明对和定理主要是探讨 "开和定理" 与 "闭和定理".

早期和定理的研究一般是对个别的拓扑性质进行讨论的. 从 Hodel[161] 开始, 人们认识到映射、空间及拓扑性质之间的内在联系, 借助映射作为手段来研究和定理已成为一种趋势, 这也充分说明了映射方法在一般拓扑学中的重要性.

定义 B.3.31 称拓扑性质 Φ 满足点有限开和定理, 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的点有限开覆盖, 如果每一 X_α 具有性质 Φ, 则 X 也具有性质 Φ.

Tanaka[373] 首先讨论了 σ 空间的点有限开和定理. Gittings[137] 研究了点有限开和定理, 证明了对拓扑和保持的拓扑性质 Φ, 若有限到一的开映射保持 Φ, 则 Φ 满足点有限开和定理.

定义 B.3.32 设 $\mathscr{P}$ 是一集族性质, 称拓扑性质 Φ 满足 $\mathscr{P}$ 闭和定理, 如果 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的具有性质 $\mathscr{P}$ 的闭覆盖, 若每一 X_α 具有性质 Φ, 则 X 具有性质 Φ.

当讨论的集族性质 $\mathscr{P}$ 分别为可数、局部有限、遗传闭包保持、闭包保持时, 相应的和定理依次称为可数闭和定理、局部有限闭和定理、遗传闭包保持闭和定理以及闭包保持闭和定理. 对闭和定理研究的推动力之一是 Tamano[369] 的问题: 仿紧性是否满足闭包保持闭和定理? Potoczny[335] 构造了非仿紧空间, 具有由有限集组成的闭包保持覆盖.

闭和定理与映射的关系由下述定理揭示.

定理 B.3.33 设 Φ 是关于拓扑和保持的拓扑性质.

(1) 若有限到一的闭映射保持 Φ, 那么 Φ 满足局部有限闭和定理;

(2) 若闭映射保持 Φ, 那么 Φ 满足遗传闭包保持闭和定理.

比遗传闭包保持集族更一般的概念是 Morita[300] 引进的控制族的概念.

定义 B.3.34 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的闭覆盖, 称 X 为 $\mathscr{P}$ 所控制, 如果 X 的子集 Z 是 X 的闭集当且仅当存在 $\mathscr{P}$ 的子集 $\mathscr{P}'$, 使 $\mathscr{P}'$ 覆盖 Z 且对 $P\in\mathscr{P}', P\cap Z$ 是

X 的闭集.

Morita 提出了对怎样的拓扑性质满足控制和定理的问题, 并且证明了正规性等一些拓扑性质满足控制和定理. Singal 和 Arya[349] 研究了一般性的控制和定理, 以及粘着空间的和定理.

B.3.4 g 函数

1955 年 Wisconsin 集论拓扑会议上, McAuley[271] 提出问题: 寻求半度量空间的纯拓扑特征? Brown[62] 也问, 半度量空间成为可展空间应附加怎样的拓扑性质? 1962 年 Heath[150] 引入了一种集值函数, 后来人们称之为 g 函数, 给上述两问题以满意的回答.

定义 B.3.35 设 X 是一空间, 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 称为 g 函数, 如果对 $x\in X, n\in\mathbb{N}$, 有 $x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$.

重要的是 Heath 使用 g 函数的开拓性方法. 在解决 McAuley 问题以及 Brown 问题之后, Heath[156] 用 g 函数刻画了层空间和 σ 空间, 进而证明了层空间是 σ 空间, 解决了 Arhangel'skiĭ[24] 提出的问题, 显示了 g 函数的功力.

为讨论具有 G_δ 对角线空间的度量化问题, Borges[57] 引进了可展空间的一种推广空间: wΔ 空间. 为探索可展空间, wΔ 空间和半层空间之间的精确关系, Hodel[162] 定义了 α 空间, 证明了可展空间 = wΔ 空间 + α 空间. Hodel[162] 还定义了 β 空间以推广 wΔ 空间和半层空间, 证明了半层空间 = β 空间 + α 空间. 为研究 M 空间的度量化问题, Ishii[175] 引进了 M$^\sharp$ 空间的推广空间: wM 空间. Ishii[175] 提出的下述问题至今尚未解决: 具有 G_δ 对角线的 wM 空间是否是可度量空间?

Hodel[163] 定义了 wN 空间作为 wM 空间和 Nagata 空间的推广, 证明了度量空间 = 可展空间 + wN 空间. Hodel[163] 还定义了 wγ 空间和 θ 空间等, 证明了 wM 空间 = wγ 空间 + wN 空间, 可展空间 = 半层空间 + θ 空间. 下述定义列举了一些由 g 函数描述的空间.

定义 B.3.36 设 g 是空间 X 的 g 函数. 考虑附加条件:

(1) $p\in g(n,z_n), g(n,z_n)\cap g(n,y_n)\neq\varnothing, y_n\in g(n,x_n)\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点;

(2) $g(n,p)\cap g(n,x_n)\neq\varnothing\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点;

(3) $p\in g(n,x_n)\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点;

(4) $y_n\in g(n,p), x_n\in g(n,y_n)\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点;

(5) $\{p,x_n\}\subset g(n,y_n), y_n\in g(n,p)\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点;

(6) $x_n\in g(n,p)\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点;

(7) $\{p,x_n\}\subset g(n,y_n)\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点.

满足上述附加条件的空间依次称为wM 空间, wN 空间, β 空间, wγ 空间, wθ 空间, q 空间和 wΔ 空间. 如果将附加条件中的 "$\{x_n\}$ 有聚点", 加强为 "$\{x_n\}$ 收敛于 p", 那么所得到的空间依次是度量空间, Nagata 空间, 半层空间, γ 空间, θ 空间, 第一可数空间或可展空间的等价定义或定义. 上述附加条件均指满足一定条件的序列有聚点, House[168] 称这类空间为广义可数紧空间. 利用这种想法, 可通过空间的覆盖列产生广义度量空间类.

定义 B.3.37 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是空间 X 的开覆盖列. 考虑附加条件:

(1) $x_n \in \mathrm{st}(p, \mathscr{U}_n) \Rightarrow \{x_n\}$ 有聚点;

(2) $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$, 且若 $x_n \in \mathrm{st}(p, \mathscr{U}_n) \Rightarrow \{x_n\}$ 有聚点;

(3) $x_n \in \mathrm{st}^2(p, \mathscr{U}_n) \Rightarrow \{x_n\}$ 有聚点.

满足上述附加条件的空间依次是 wΔ 空间, M 空间和 wM 空间. 如果将附加条件中的 "$\{x_n\}$ 有聚点" 加强为 "$\{x_n\}$ 收敛于 p", 那么所定义的空间依次是可展空间, 度量空间, 度量空间.

与 g 函数相关的覆盖族是 CWC 函数概念. 它在度量化问题中发挥着独特的作用.

定义 B.3.38[213] 设 X 是一空间, 函数 $g: \mathbb{N} \times X \to \mathscr{P}(X)$ (X 的幂集) 称为 CWC 函数, 如果对 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, 有 $x \in g(n+1, x) \subset g(n, x)$, 且 $U \in \tau$ 当且仅当对 $x \in U$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $g(n, x) \subset U$. CWC 函数也称为弱基 g 函数 [130].

1965 ~ 1975 年是广义度量空间蓬勃发展的 10 年, 尤其是 1975 年 Burke 和 Lutzer[75] 的综述报告 "广义度量空间理论的最新进展", 宣告了广义度量空间理论的形成, 确立了该理论在一般拓扑学中的地位. 1971 年在荷兰创刊的 "General Topology and its Applications", 和 1976 在美国创刊的 "Topology Proceedings" 都充分反映了这种趋势. 显著的标志是为了解决奠基时期所形成的四类问题, 极大丰富了广义度量理论, 同时也产生了许多亟待解决的新问题. 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理的激发及基的推广产生的种种概念的有机结合, 汇成一股洪流把广义度量空间的研究推向高潮. Siwiec 和 Nagata[352] 关于 σ 空间的特征定理, Nagami[309] 关于仿紧 Σ 空间的可数积定理以及其后 Foged[110] 关于 $\aleph$ 空间的刻画, 构成这些重要进展中的精彩篇章. 通过对 Alexandroff 设想的系统研究, 映射已在一般拓扑学的大舞台扮演重要的角色, 它与许多经典方法结合形成空间理论研究中必不可少的手段 [4]. Arhangel'skiĭ[24] 在 "映射与空间" 中的精辟论点及深刻问题, Michael[285] 关于五种商映射的全面描述, 成为一般拓扑学继续向前发展的重要源泉之一.

参 考 文 献

[1] Alexander C C. Semi-developable spaces and quotient images of metric spaces. *Pacific J Math*, 1971, **37**: 277–293. MR 47#2543. Zbl 0216. 19303

[2] Aleksandrov P S (Alexandroff P S). On the metrisation of topological spaces (in Russian). *Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys*, 1960, **8**: 135–140. MR 22#5024. Zbl 0124. 37903

[3] Aleksandrov P S. On some results concerning topological spaces and their continuous mappings. In: *Proc 1st Topological Symp*, Prague, 1961. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra I. New York: Academic Press, 1962, 41–54. MR 26#3003. Zbl 0113. 16506

[4] Aleksandrov P S, Fedorchuk V V, Zaĭcev V I. The main aspects in the development of set-theoretic topology (in Russian). *Uspechi Mat Nauk*, 1978, **33**(3): 3–48 (江守礼，刘畅畅译. 点集拓扑学发展的几个奠基性时刻. 数学译林, 1984, **3**(3): 223–233, (4): 313–326, 366). MR 58#12879. Zbl 0409. 54001

[5] Alexandroff P S. Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits. *C R Acad Paris*, 1924, **178**: 185–187

[6] Alexandroff P S. On local properties of closed sets. *Ann Math*, 1935, **36**(2): 1–35. MR 1503204. Zbl 0011. 03901

[7] Alexandroff P S, Niemytzki V V. The condition of metrizability of topological spaces and the axiom of symmetry (in Russian). *Math Sb*, 1938, **3**: 663–672. Zbl 0019. 23504

[8] Alexandroff P S, Urysohn P S. Sur les espaces topologiques compacts. *Bull Intern Acad Pol Sci Ser A*, 1923: 5–8

[9] Alexandroff P S, Urysohn P S. Mémoire sur les espaces topologiques compacts. *Verh Koninkl Akad Wetensch*, 1929, **14**: 1–96. JFM 55. 0960. 02

[10] Alster K. Metric spaces all of whose decompositions are metric. *Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys*, 1972, **20**: 395–400. MR 46#6308. Zbl 0242. 54032

[11] Alster K, Burke D K, Davis S. The wΔ-space problem. *Topology Appl*, 1988, **30**: 175–181. MR 90b: 54017. Zbl 0659. 54020

[12] Anderson B A. Metric topologies[Ph D Thesis]. University of Iowa, 1966

[13] Anderson B A. Topologies comparable to metric topologies. In: *Proc Arizona State Univ Topological Conf*, 1967. 1969, 15–21. Zbl 0211. 25602

[14] Aquaro G. Point countable open covering in countably compact spaces. In: *Proc 2nd Prague Topological Symp*, Prague, 1966. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, 1967, 39–41. Zbl 0157. 29403

[15] Arens R. Note on convergence in topology. *Math Mag*, 1950, **23**: 229–234. MR 12, 271h. Zbl 0041. 31502

[16] Arens R, Dugundji J. Remark on the concept of compactness. *Portug Math*, 1950, **9**: 141–143. MR 12, 434b. Zbl 0039. 18602

[17] Arhangel'skiĭ A V. An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1959, **126**(2): 239–241. MR 21#5176. Zbl 0087. 37602

[18] Arhangel'skiĭ A V. On mappings of metric spaces (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1962, **145**: 245–247. MR 25#2579. Zbl 0124. 15802

[19] Arhangel'skiĭ A V. On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1963, **151**: 751–754. MR 27#2959. Zbl 0124. 15801

[20] Arhangel'skiĭ A V. Some types of factor mappings and the relations between classes of topological spaces (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1963, **153**: 743–746. MR 28#1587. Zbl 0129. 38103

[21] Arhangel'skiĭ A V. Some theorems in metrization (in Russian). *Uspechi Mat Nauk*, 1963, **18**(5): 139–145. MR 27#6242. Zbl 0128. 16701

[22] Arhangel'skiĭ A V. Bicompact sets and the topology of spaces (in Russian). *Trudy Moskov Mat Ob*, 1965, **13**: 3–55. MR 33#3251. Zbl 0162. 26602

[23] Arhangel'skiĭ A V. Behavior of metrizability in factor mappings. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1965, **164**(2): 247–250. MR 33#697. Zbl 0136. 43602

[24] Arhangel'skiĭ A V. Mappings and spaces (in Russian). *Uspechi Mat Nauk*, 1966, **21**(4): 133–184 (吴利生, 陈必胜译. 映射与空间. 数学译林, 1981, 试刊 (2): 12–26, (3): 50–59; 1982, **1**(2): 151–168). MR 37#3534. Zbl 0171. 43603

[25] Arhangel'skiĭ A V. Perfect maps and condensations (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1967, **176**: 983–986. MR 38#6552. Zbl 0172. 24403

[26] Arhangel'skiĭ A V. Intersection of topologies, and pseudo-open bicompact mappings (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1976, **226**(4): 745–748. MR 53#6487. Zbl 0344. 54010

[27] Arhangel'skiĭ A V. General Topology III. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 51. Berlin: Springer-Verlag, 1995. MR 97f: 54001. Zbl 0826. 00014

[28] Arhangel'skiĭ A V. Notes on the history of general topology in Russia. *Topology Proc*, 2000, **25**(Spring): 353–395. MR 2003c: 01029. Zbl 1006. 54001

[29] Arhangel'skiĭ A V, Buzyakova R Z. Addition theorems and D-spaces. *Comment Math Univ Carolinae*, 2002, **43**: 653–663. MR 2005a: 54033. Zbl 1090.54017

[30] Arhangel'skiĭ A V, Franklin S P. Ordinal invariants for topological spaces. *Michigan Math J*, 1968, **15**: 313–320. MR 39#2112. Zbl 0167. 51102

[31] Arhangel'skiĭ A V, Just W, Wicke H. Not all pseudo-open maps are compositions of closed maps and open maps. *Topology Proc*, 1994, **19**: 3–14. MR 96k: 54011. Zbl 0843. 54021

[32] Arhangel'skiĭ A V, Ponomarev V I. Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises (in Russian). Moscow: Hayka, 1974 (英译本: Jain V K 译. Mathematics and its Applications, 13. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1984. 北京: 世界图书出版公司, 1992 重印)译者. MR 87i: 54001. Zbl 0568. 54001

[33] Arhangel'skiĭ A V, Pontryagin L S. General Topology I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 17. Berlin: Springer-Verlag, 1990 (北京: 世界图书出版公司, 1992 重印). MR 91g: 54001. Zbl 0778. 00007

[34] Arhangel'skiĭ A V, Projzvolov V V. On the connection between pointwise cardinality of systems of subsets of a compact space and its weight (in Russian). *Vestnik Moskov Univ Ser I Mat Meh*, 1966, **21**(3): 75–77. MR 33#3252. Zbl 0163. 17203

[35] Aronszajn N. Über ein urbildproblem. *Fund Math*, 1931, **17**: 92–121. Zbl 0003. 02703

[36] Atkins J M, Slaughter Jr F G. On the metrizability of preimages of metric spaces under closed continuous functions. *Proc Oklahoma Topological Conf*, 1972, 13–22. MR 54#13864. Zbl 0246. 54009

[37] Aull C E. Quasi-developments and $\delta\theta$-bases. *J London Math Soc*, 1974, **9**: 197–204. MR 52#9171. Zbl 0295. 54023

[38] Aull C E. A survey paper on some base axioms. *Topology Proc*, 1978, **3**: 1–36. MR 80m: 54044. Zbl 0409. 54038

[39] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, 1. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. MR 99a: 01001. Zbl 0888. 54001

[40] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. MR 2001e: 54001. Zbl 0902. 54001

[41] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, 3. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. MR 2002k: 54001. Zbl 0980. 00038

[42] Bacon P. The compactness of countably compact spaces. *Pacific J Math*, 1970, **32**: 587–592. MR 41#2624. Zbl 0175. 49503

[43] Baer R W, Levi F. Stetige funktionen in topologischen räumen. *Math Zeitschr*, 1932, **34**: 110–130. MR 1545244. Zbl 0002. 16002

[44] Balogh Z T. Topological spaces with point-networks. *Proc Amer Math Soc*, 1985, **94**: 497–501. MR 87a: 54040. Zbl 0584. 54024

[45] Balogh Z T. Nonshrinking open covers and K. Morita's duality conjectures. *Topology Appl*, 2001, **115**: 333–341. MR 2002j: 54030. Zbl 0983. 54023

[46] Balogh Z T, Gruenhage G. When the collection of ϵ-balls is locally finite. *Topology Appl*, 2002, **124**(3): 445-450. MR 2003h: 54038. Zbl 1015. 54011

[47] Bennett H R. Quasi-developable spaces. *Proc Arizona State Univ Topological Conf*, 1967. 1969, 314–317. Zbl 0236. 54021

[48] Bennett H R. On Arhangel'skiĭ's class MOBI. *Proc Amer Math Soc*, 1970, **26**: 178–180. MR 42#2425. Zbl 0197. 48502

[49] Bennett H R. On quasi-developable spaces. *General Topology Appl*, 1971, **1**: 253–262. MR 44#5921. Zbl 0222. 54037

[50] Bennett H R, Byerly R, Lutzer D J. Compact G_δ sets. *Topology Appl*,2006,**153**:2169–2181

[51] Bennett H R, Lutzer D J. A note on weak θ-refinability. *General Topology Appl*, 1972, **2**: 49–54. MR 46#853. Zbl 0229. 54022

[52] Berney E S. A regular Lindelöf semi-metric space which has no countable network. *Proc Amer Math Soc*, 1970, **26**: 361–364. MR 42#5225. Zbl 0198. 55602

[53] Bing R H. Metrization of topological spaces. *Canad J Math*, 1951, **3**: 175–186. MR 13, 264f. Zbl 0042. 41301

[54] Boone J R. Some characterizations of paracompactness in k-spaces. *Fund Math*, 1971, **72**: 145–153. MR 45#4359. Zbl 0223. 54013

[55] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings. *Czech Math J*, 1976, **26**: 174–182. MR 53#6505. Zbl 0334. 54003

[56] Borges C R. On stratifiable spaces. *Pacific J Math*, 1966, **17**: 1–16. MR 32#6409. Zbl 0175. 19802

[57] Borges C R. On metrizability of topological spaces. *Canad J Math*, 1968, **20**: 795–804. MR 37#6910. Zbl 0167. 21201

[58] Borges C R. Metrizability of adjunction spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1970, **24**: 446–451. MR 41#7623. Zbl 0189. 53704

[59] Borges C R, Lutzer D J. Characterizations and mappings of M_i-spaces. In: Topology Conference (Virginia Polytech Inst and State Univ, Blacksburg, 1973). Lecture Notes in Math, 375. Berlin: Springer-Verlag, 1974, 34–40. MR 50#14681. Zbl 0286. 54014

[60] Borsuk K. Quelques rétracts singuliers. *Fund Math*, 1935, **24**: 249–258. Zbl 0011. 04004

[61] Bourbaki N. Topologie Générale, Ch. I et II. Paris: Hermann, 1940. Zbl 0026. 43101

[62] Brown M. Semi-metric spaces. In: Summer Institute on Set Theoretic Topology, Wisconsin, 1955. 1958, 62–64

[63] Buhagiar D, Lin Shou (林寿). A note on subparacompact spaces. *Matematicki Vesnik*, 2000, **52**(3–4): 119–123. MR 2002j: 54022. Zbl 1054. 54508

[64] Burke D K. On subparacompact spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1969, **23**: 655–663. MR 40#3508. Zbl 0187. 19902

[65] Burke D K. Subparacompact spaces. *Proc Washington State Univ Topological Conf*, 1970, 39–49. MR 42#1066. Zbl 0198. 27501

[66] Burke D K. On p-spaces and wΔ-spaces. *Pacific J Math*, 1970, **35**: 285–296. MR 43#3986. Zbl 0189. 53403

[67] Burke D K. Cauchy sequences in semimetric spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1972, **33**: 161–164. MR 44#7512. Zbl 0233. 54015

[68] Burke D K. A nondevelopable locally compact Hausdorff space with a G$_\delta$-diagonal. *General Topology Appl*, 1972, **2**: 287–291. MR 47#7702. Zbl 0243. 54017

[69] Burke D K. Spaces with G_δ-diagonal. In: TOPO 72–general topology and its applications. *Proc 2nd Pittsburgh Internat Conf*, Pittsburgh, 1972. Lecture Notes in Math, 378. Berlin: Springer-Verlag, 1974, 95–100. MR 51#1755. Zbl 0286. 54018

[70] Burke D K. Preservation of certain base axioms under a perfect mapping. *Topology Proc*, 1976, **1**: 269–279. MR 56#6621. Zbl 0392. 54007

[71] Burke D K. Closed mappings. In: Reed G M ed. Surveys in General Topology. New York: Academic Press, 1980, 1–32. MR 81c: 54014. Zbl 0441. 54005

[72] Burke D K. Covering properties. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984, 347–422. MR 86e: 54030. Zbl 0569. 54022

[73] Burke D K, van Douwen E K. On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. In: Reed G M ed. Set-theoretic Topology (Papers, Inst Medicine and Math, Ohio Univ, Athens, 1975–1976). New York: Academic Press, 1977, 81–89. MR 55#13381. Zbl 0436. 54023

[74] Burke D K, Engelking R, Lutzer D J. Hereditarily closure-preserving collections and metrization. *Proc Amer Math Soc*, 1975, **51**: 483–488. MR 51#6746. Zbl 0307. 54030

[75] Burke D K, Lutzer D J. Recent advances in the theory of generalized metric spaces. In: *Topology: Proc 9th Ann Spring Topological Conf*, Memphis State Univ, 1975. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 24. New York: Marcel Dekker Inc, 1976, 1–70. MR 55#1318. Zbl 0353. 54020

[76] Burke D K, Michael E A. On a theorem of V. V. Filippov. *Israel J Math*, 1972, **11**: 394–397. MR 47#1022. Zbl 0236. 54015

[77] Burke D K, Michael E A. On certain point-countable covers. *Pacific J Math*, 1976, **64**: 79–92. MR 57#7542. Zbl 0341. 54022

[78] Burke D K, Stoltenberg R A. A note on p-spaces and Moore spaces. *Pacific J Math*, 1969, **30**: 601–608. MR 40#3507. Zbl 0183. 27502

[79] Ceder J G. Some generalizations of metric spaces. *Pacific J Math*, 1961, **11**: 105–125. MR 24#A1707. Zbl 0103. 39101

[80] Chaber J. Conditions which imply compactness in countably compact spaces. *Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys*, 1976, **24**: 993–998. MR 58#24189. Zbl 0347. 54013

[81] Chaber J. Primitive generalizations of σ-spaces. In: Császár Á ed. Topology. *Colloq Math Soc János Bolyai*, 23, Budapest (Hungary), 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980, 259–268. MR 81m: 54054. Zbl 0442. 54020

[82] Chaber J. Perfect images of p-spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1982, **85**: 609–614. MR 83h: 54037. Zbl 0491. 54007

[83] Chaber J. Perfect preimages of Moore spaces. *Bull Pol Acad Sci, Math*, 1983, **31**: 31–34. MR 85e: 54030. Zbl 0542. 54026

[84] Chaber J. Generalizations of Lašnev's theorem. *Fund Math*, 1983, **119**: 85–91. MR 85f: 54022. Zbl 0547. 54009

[85] Chaber J. On the class MOBI. In: Frolíc Z ed. *Proc 6th Prague Topological Symp*, Prague, 1986. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI. Berlin: Heldermann Verlag, 1988, 77–82. MR 90b: 54009. Zbl 0636. 54016

[86] Chaber J. More nondevelopable spaces in MOBI. *Proc Amer Math Soc*, 1988, **103**(1): 307–313. MR 89k: 54030. Zbl 0648. 54017

[87] Chen Huaipeng (陈怀鹏). Weak neighborhoods and Michael-Nagami's question. *Houston J Math*, 1999, **25**: 297–309. MR 2000d: 54015. Zbl 0965. 54031

[88] Chen Huaipeng. Compact-covering maps and k-networks. *Proc Amer Math Soc*, 2003, **131**: 2623–2632. MR 2004f: 54013. Zbl 1025. 54022

[89] Chow Shao-lien (周绍濂). Le probl'eme intégral de la localisation des ensembles ponctuels plans bornés à paratingent incomplet. *Fund Math*, 1937, **29**: 12–21. Zbl 0017. 03802

[90] Collins P J, Roscoe A W. Criteria for metrisability. *Proc Amer Math Soc*, 1984, **90**: 631–640. MR 85c: 54041. Zbl 0541. 54034

[91] Collins P J, Reed G M, Roscoe A W, Rudin M E. A lattice of conditions on topological spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1985, **94**: 487–496. MR 87b: 54018. Zbl 0562. 54043

[92] Corson H H. Normality in subsets of product spaces. *Ann J Math*, 1959, **81**: 785–796. MR 21#5947. Zbl 0095. 37302

[93] Creede G D. Semi-stratifiable spaces. In: *Proc Arizona State Univ Topological Conf*, 1967. 1969, 318–323. Zbl 0211. 25702

[94] Creede G D. Concerning semi-stratifiable spaces. *Pacific J Math*, 1970, **32**: 47–54. MR 40#8006. Zbl 0189. 23304

[95] Dieudonné J. Une généralisation des espaces compacts. *J Math Pures Appl*, 1944, **23**: 65–76. MR 7, 134f. Zbl 0060. 39508

[96] van Douwen E K. Simultaneous extension of continuous functions. Amsterdam: Thesis Free University, 1975

[97] van Douwen E K, Pfeffer W F. Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces. *Pacific J Math*, 1979, **81**: 371–377. MR 80h: 54027. Zbl 0409. 54011

[98] Dowker C H. On countably paracompact spaces. *Canad J Math*, 1951, **3**: 219–224. MR 13, 264c. Zbl 0042. 41007

[99] Dugundji J. Topology. Boston: Allyn and Bacon Inc, 1966. MR 33#1824. Zbl 0144. 21501

[100] Eda K, Gruenhage G, Koszmider P, Tamano K, Todorčevič S. Sequential fans in topology. *Topology Appl*, 1995, **67**: 189–220. MR 96k: 54007. Zbl 0868. 54001

[101] Engelking R. General Topology (revised and completed edition). Berlin: Heldermann Verlag, 1989. MR 91c: 54001. Zbl 0684. 54001

[102] Fedeli A, Le Donne A. On good connected preimages. *Topology Appl*, 2002, **125**: 489–496. MR 2003g: 54062. Zbl 1019. 54008

[103] Filippov V V. The perfect image of a paracompact feathered space (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1967, **176**(3): 533–535. MR 36#5903. Zbl 0167. 51202

[104] Filippov V V. Preservation of the order of a base under a perfect mapping (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1968, **181**: 1077-1079. MR 38#683. Zbl 0186. 56004

[105] Filippov V V. Quotient spaces and multiplicity of a base (in Russian). *Mat Sb*, 1969, **80**(4): 521–532. MR 41#6179. Zbl 0202. 53801

[106] Fletcher P, Lindgren W F. Orthocompactness and strong Čech completeness in Moore spaces. *Duke Math J*, 1972, **39**: 753–766. MR 47#1029. Zbl 0251. 54013

[107] Fletcher P, Lindgren W F. On wΔ-spaces, wδ-spaces and $\Sigma^\sharp$-spaces. *Pacific J Math*, 1977, **71**: 419-428. MR 58#12919. Zbl 0361. 54012

[108] Foged L. Weak bases for topological spaces[Ph D Thesis]. Missouri: Washington University, 1979

[109] Foged L. On g-metrizability. *Pacific J Math*, 1982, **98**: 327–332. MR 84c: 54054. Zbl 0478. 54025

[110] Foged L. Characterizations of $\aleph$-spaces. *Pacific J Math*, 1984, **110**: 59–63. MR 85d: 54037. Zbl 0542. 54030

[111] Foged L. Sequential coreflections of stratifiable spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1984, **92**: 470–472. MR 86a: 54034. Zbl 0549. 54021

[112] Foged L. A characterization of closed images of metric spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1985, **95**: 487–490. MR 87c: 54020. Zbl 0592. 54027

[113] Foged L. Normality in k-and $\aleph$-spaces. *Topology Appl*, 1986, **22**: 223–240. MR 87i: 54045. Zbl 0602. 54030

[114] Foged L. Point-countable bases and k-networks. *Topology Appl*, 1996, **69**: 101–114. MR 97b: 54036. Zbl 0857. 54024

[115] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice. *Fund Math*, 1965, **57**: 107–115. MR 31#5184. Zbl 0132. 17802

[116] Frolík Z. Generalizations of compact and the Lindelöf spaces (in Russian). *Czech Math J*, 1959, **9**: 172–217. MR 21#3821. Zbl 0098. 14201

[117] Frolík Z. On the topological product of paracompact spaces. *Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys*, 1960, **8**: 747–750. MR 23#A2859. Zbl 0099. 38601

[118] Gale D. Compact sets of functions and function rings. *Proc Amer Math Soc*, 1950, **1**: 303–308. MR 12, 119d. Zbl 0037. 35501

[119] 高国士. 关于仿紧性的承继性. 江苏师院学报 (自然科学版), 1979, (1): 10–13

[120] 高国士. 关于闭包保持和定理. 数学学报, 1986, **29**: 58–62. MR 87m: 54065. Zbl 0607. 54006

[121] 高国士. 关于 k-网和基. 苏州大学学报 (自然科学版), 1986, **2**: 107–111

[122] 高国士. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 2000. Zbl 0969. 54001

[123] 高国士等. 仿紧性与广义度量空间. 南京: 江苏科学技术出版社, 1988

[124] Gao Yinzhu (高印珠). A note concerning the Collins, Reed, Roscoe, Rudin metrization theorem. *Topology Appl*, 1996, **74**: 73–82. MR 98b: 54037a. Zbl 0883. 54028

[125] 高智民. K-半分层空间的某些结果. 西北大学学报 (自然科学版), 1985, (3): 12–16. MR 87g: 54064

[126] Gao Zhimin (高智民). On g-function separation. *Questions Answers in General Topology*, 1986, **4**: 47–57. MR 87j: 54051. Zbl 0597. 54027

[127] Gao Zhimin. $\aleph$-space is invariant under perfect mappings. *Questions Answers in General Topology*, 1987, **5**: 271–279. MR 89b: 54033a. Zbl 0636. 54026

[128] Gao Zhimin. The closed images of metric spaces and Fréchet $\aleph$-spaces. *Questions Answers in General Topology*, 1987, **5**: 281–291. MR 89b: 54033b. Zbl 0643. 54035

[129] Gao Zhimin. On J. Nagata's question. *Math Japonica*, 2000, **51**(1): 49–52. MR 2001b: 54034. Zbl 0948. 54027

[130] Gao Zhimin. Metrizability of spaces and weak base g-functions. *Topology Appl*, 2005, **146/147**: 279–288. MR 2006b: 54021.Zb1 1059.54023

[131] Gao Zhimin, Hattori Y. A characterization of closed s-images of metric spaces. *Questions Answers in General Topology*, 1986/87, **4**: 147–151. MR 0917897. Zbl 0617. 54024

[132] Gartside P M, Reznichenko E A. Near metric propertics of function spaces. *Fund Math*, 2000, **164**(2): 97–114. MR 2002b: 54026. Zbl 0971. 46012

[133] Ge Ying (葛英). On pseudo-sequence coverings, π-images of metric spaces. *Mathmaticki Vesnik*, 2005, **57**(3–4): 113–120. MR 2194600

[134] Gillman L, Jerison M. Rings of continuous functions. Princeton: Van Nostrand, 1960 (Graduate Texts in Math, 43. Berlin: Springer-Verlag, 1976. 北京: 世界图书出版公司, 1992 重印). MR 53#11352. Zbl 0327. 46040

[135] Gittings R F. Some results on weak covering conditions. *Canad J Math*, 1974, **26**: 1152–1156. MR 50#5738. Zbl 0268. 54018

[136] Gittings R F. Concerning quasi-complete spaces. *General Topology Appl*, 1976, **6**: 73–89. MR 52#11855. Zbl 0323. 54025

[137] Gittings R F. Open mapping theory. In: Reed G M ed. Set-theoretic Topology (Papers, Inst Medicine and Math, Ohio Univ, Athens, 1975–1976). New York: Academic Press, 1977, 141–191. MR 58#2687. Zbl 0363. 00011

[138] Good C, Knight R W, Mohamad A M. On the metrizability of spaces with a sharp base. *Topology Appl*, 2002, **125**(3): 543–552; erratum ibid, 2004, **143**: 291–292. MR 2003h: 54039. Zbl 1018. 54021

[139] Gruenhage G. Stratifiable spaces are M_2. *Topology Proc*, 1976, **l**: 221–226. MR 56#6614. Zbl 0389. 54019

[140] Gruenhage G. Generalized metric spaces. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984, 423–501. MR 86h: 54038. Zbl 0555. 54015

[141] Gruenhage G. Generalized metric spaces and metrization. In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology. Papers from the Prague Topological Symp, Prague, 1991. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1992, 239–274. MR 1229128. Zbl 0794. 54034

[142] Gruenhage G. Metrizable spaces and generalizations. In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology II. Papers from the Prague Topological Symp, Prague, 2001. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2002, 201–225. MR 1969999. Zbl 1029. 54036

[143] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers. *Pacific J Math*, 1984, **113**: 303–332. MR 85m: 54018. Zbl 0561. 54016

[144] Gul'ko S P. On properties of subsets of Σ-products (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1977, **237**(3): 505–508. MR 57#1395. Zbl 0397. 54012

[145] Guthrie J A. A characterization of $\aleph_0$-spaces. *General Topology Appl*, 1971, **1**: 105–110. MR 44#5922. Zbl 0216. 19103

[146] Guthrie J A. Mapping spaces and cs-networks. *Pacific J Math*, 1973, **47**: 465–471. MR 49#3821. Zbl 0253. 54025

[147] Hájek O. Note on quotient maps. *Comment Math Univ Carolinae*, 1966, **7**: 319–323. MR 34#1992. Zbl 0149. 19304

[148] Hanai S. On closed mappings II. *Proc Japan Acad*, 1956, **32**: 388–391. MR 18, 225b

[149] Hart K P, Nagata J, Vaughan J E. Encyclopedia of General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2004. MR 2005d: 54001. Zbl 1059. 54001

[150] Heath R W. Arc-wise connectedness in semi-metric spaces. *Pacific J Math*, 1962, **12**: 1301–1319. MR 29#4032. Zbl 0113. 16501

[151] Heath R W. Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces. *Canad J Math*, 1964, **16**: 763–770. MR 29#4033. Zbl 0122. 17401

[152] Heath R W. On spaces with point-countable bases. *Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys*, 1965, **13**: 393–395. MR 32#4656. Zbl 0132. 18402

[153] Heath R W. On open mappings and certain spaces satisfying the first countability axiom. *Fund Math*, 1965, **57**: 91–96. MR 31#4006. Zbl 0134. 41802

[154] Heath R W. A paracompact semi-metric space which is not an M_3-space. *Proc Amer Math Soc*, 1966, **17**: 868–870. MR 33#3256. Zbl 0151. 30201

[155] Heath R W. On certain first countable spaces. *Ann Math Stud*, 1966, **60**: 103-113. Zbl 0147. 41603

[156] Heath R W. Stratifiable spaces are σ-spaces. *Notices Amer Math Soc*, 1969, **17**: 761–761

[157] Heath R W. Problem I. *General Topology Appl*, 1971, **1**: iv

[158] Heath R W, Hodel R E. Characterizations of σ-spaces. *Fund Math*, 1973, **77**: 27l–275. MR 47#9549. Zbl 0258. 54027

[159] Heath R W, Junnila H J K. Stratifiable spaces as subspaces and continuous images of M_1-spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1981, **83**: 146–148. MR 82f: 54045. Zbl 0476. 54024

[160] Heath R W, Lutzer D J, Zenor P L. Monotonically normal spaces. *Trans Amer Math Soc*, 1973, **178**: 481–493. MR 51#9030. Zbl 0269. 54009

[161] Hodel R E. Sum theorems for topological spaces. *Pacific J Math*, 1969, **30**: 59–65. MR 40#6502. Zbl 0181. 50502

[162] Hodel R E. Moore spaces and wΔ-spaces. *Pacific J Math*, 1971, **38**: 641–652. MR 46#6290. Zbl 0219. 54024

[163] Hodel R E. Spaces defined by sequences of open covers which guarantee that certain sequences has cluster points. *Duke Math J*, 1972, **39**: 253–263. MR 45#2657. Zbl 0242. 54027

[164] Hodel R E. Some results in metrization theory, 1950 – 1972. In: Topology Conference (Virginia Polytech Inst and State Univ, Blacksburg, 1973). Lecture Notes in Math, 375. Berlin: Springer-Verlag, 1974, 120–136. MR 50#8459. Zbl 0287. 54029

[165] Hodel R E. Metrizability of topological spaces. *Pacific J Math*, 1974, **55**: 441–459. MR 51#6747. Zbl 0286. 54017

[166] Hodel R E. A history of generalized metrizable spaces. In: Aull C E, Lowen R eds. Handbook of the History of General Topology, 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, 541–576. MR 2002a: 54001. Zbl 0940. 54003

[167] Hoshina T. On the quotient s-images of metric spaces. *Sci Rep Tokyo Kyoiku Daigaku Sect A*, 1970, **10**: 265–268. MR 43#1115. Zbl 0214. 49503

[168] House V D. Countable products of generalized countably compact spaces. *Pacific J Math*, 1975, **57**: 183–197. MR 51#11427. Zbl 0301. 54025

[169] Hurewicz W. Ueber stetige bilder von punktmengen. *Proc Akad Amsterdam*, 1926, **29**: 1014–1017. JFM 52. 0595. 03

[170] Hušek M, van Mill J. Recent Progress in General Topology. Papers from the Prague Topological Symp, Prague, 1991. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1992. MR 95g: 54004. Zbl 0782. 00072

[171] Hušek M, van Mill J. Recent Progress in General Topology II. Papers from the Prague Topological Symp, Prague, 2001. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2002. MR 2004e: 54001. Zbl 1005. 00037

[172] Hyman D M. A note on closed maps and metrizability. *Proc Amer Math Soc*, 1969, **21**: 109–112. MR 38#6534. Zbl 0174. 25803

[173] Ikeda Y, Liu Chuan (刘川), Tanaka Y. Quotient compact images of metric spaces, and related matters. *Topology Appl*, 2002, **122**(1-2): 237–252. MR 2003f: 54063. Zbl 0994. 54015

[174] Ishii T. On closed mappings and M-spaces I, II. *Proc Japan Acad*, 1967, **43**: 752–761. MR 36#5904. Zbl 0153. 52402; Zbl 0155. 31305

[175] Ishii T. On wM-spaces I, II. *Proc Japan Acad*, 1970, **46**: 5–15. MR 41#6147. Zbl 0198. 27202; Zbl 0198. 27203

[176] Ishii T. wM-spaces and closed maps. *Proc Japan Acad*, 1970, **46**: 16–21. MR 41#7648. Zbl 0198. 27204

[177] Ishikawa F. On countably paracompact spaces. *Proc Japan Acad*, 1955, **31**: 686–687. MR 17, 650a. Zbl 0066. 41001

[178] Isiwata T. Inverse images of developable spaces. *Bull Tokyo Gakugei Univ IV Math*, 1971, **23**: 11–21. MR 46#6291. Zbl 0346. 54011

[179] Itō M. The closed image of a hereditary M_1-space is M_1. *Pacific J Math*, 1984, **113**: 85–91. MR 85j: 54039. Zbl 0503. 54035

[180] Itō M. M_3-spaces whose every point has a closure preserving outer base are M_1. *Topology Appl*, 1985, **19**: 65–69. MR 86g: 54039. Zbl 0567. 54012

[181] Yakovlov N N. On g-metrizable spaces (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1976, **226**(3): 530–532. MR 54#3662. Zbl 0402. 54030

[182] Jayanthan A J, Kannan V. Spaces every quotient of which is metrizable. *Proc Amer Math Soc*, 1988, **103**: 294–298. MR 89f: 54017. Zbl 0646. 54015

[183] 蒋继光. 关于仿紧性与拓扑空间的可度量性. 数学学报, 1986, **29**: 679–701. MR 0876351. Zbl 0612. 54035

[184] 蒋继光. 一般拓扑学专题选讲. 成都: 四川教育出版社, 1991

[185] Jiang Shouli (江守礼). Every strict p-space is θ-refinable. *Topology Proc*, 1986, **11**: 309–316. MR 89j: 54030. Zbl 0637. 54024

[186] Jones F B. Concerning normal and completely normal spaces. *Bull Amer Math Soc*, 1937, **43**: 671–677. Zbl 0017. 42902

[187] Jones F B. R. L. Moore's axiom 1' and metrization. *Proc Amer Math Soc*, 1958, **9**: 487–487. MR 20#278. Zbl 0091. 36101

[188] Junnila H J K. Neighbornets. *Pacific J Math*, 1978, **76**: 83–108. MR 58#2734. Zbl 0353. 54016

[189] Junnila H J K. On submetacompactness. *Topology Proc*, 1978, **3**: 375–405. MR 80j: 54015. Zbl 0413. 54027

[190] Junnila H J K. Paracompactness, metacompactness, and semi-open covers. *Proc Amer Math Soc*, 1979, **73**: 244–248. MR 81e: 54020. Zbl 0404. 54016

[191] Junnila H J K. Metacompactness, paracompactness, and interior-preserving open covers. *Trans Amer Math Soc*, 1979, **249**: 373–385. MR 80b: 54024. Zbl 0404. 54017

[192] Junnila H J K. Three covering properties. In: Reed G M ed. Surveys in General Topology. New York: Academic Press, 1980, 195–245. MR 81e: 54019. Zbl 0449. 54018

[193] Junnila H J K, Yun Ziqiu (恽自求). $\aleph$-spaces and spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network. *Topology Appl*, 1992, **44**: 209–215. MR 93m: 54045. Zbl 0772. 54024

[194] Kanatani Y, Sasaki N, Nagata J. New characterizations of some generalized metric spaces. *Math Japonica*, 1985, **30**: 805–820. MR 86m: 54036. Zbl 0586. 54033

[195] Kao Kuo-shih (高国士). A note on M_1-spaces. *Pacific J Math*, 1983, **108**: 121–128. MR 85b: 54047. Zbl 0487. 54029

[196] Katětov M. Measures in fully normal spaces. *Fund Math*, 1951, **38**: 73–84. MR 14, 27c. Zbl 0045. 17101

[197] Katětov M. Extension of locally finite coverings (in Russian). *Colloq Math*, 1958, **6**: 145–151. MR 21#2219. Zbl 0085. 16901

[198] Kato A. Solution of Morita's problems concerning countably-compactifications. *General Topology Appl*, 1977, **7**(1): 77–87. MR 55#11211. Zbl 0344. 54029

[199] Katuta Y. Expandability and its generalizations. *Fund Math*, 1975, **87**: 231–250. MR 51#13986. Zbl 0312. 54026

[200] Kelley J L. General Topology. New York: van Nostrand, 1955 (Graduate Texts Math, 27. Berlin: Springer-Verlag, 1975. 北京: 世界图书出版公司, 2001 重印. 中译本: 吴从炘, 吴让泉译. 一般拓扑学. 北京: 科学出版社, 1982). MR 16, 1136c. Zbl 0066. 16604

[201] Kemoto N, Yajima Y. Submetacompactness of β-spaces. *Topology Proc*, 1997, **22**(Spring): 265–279. MR 2000b: 54035. Zbl 0917. 54025

[202] 儿玉之宏 (Kodama Y), 永见启应 (Nagami K). 位相空间论 (日文). 东京: 岩波书店, 1974 (中译本: 儿玉之宏, 永见启应著, 方嘉琳译. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 1984)

[203] Kofner Ja. A new class of spaces and some problems from symmetrizability theory (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1969, **187**: 270–273. MR 40#1964. Zbl 0202. 53702

[204] Kofner Ja. On two problems from the theory of symmetrizability (in Russian). *Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys*, 1970, **18**(2): 81–87. MR 41#7620. Zbl 0199. 57503

[205] Kofner Ja. Closed mappings and quasi-metrics. *Proc Amer Math Soc*, 1980, **80**: 333–336. MR 81m: 54049. Zbl 0463. 54010

[206] Kombarov A P. On the tightness and normality of Σ-products (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1978, **239**: 775–778. MR 58#12889. Zbl 0397. 54013

[207] Kullman D E. Developable spaces and p-spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1971, **27**: 154–160. MR 42#6780. Zbl 0209. 53903

[208] Kunen K. Weak P-points in $\mathbb{N}^*$. In: Császár Á ed. Topology. *Colloq Math Soc János Bolyai*, 23, Budapest (Hungary), 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980, 741–749. MR 82a: 54046. Zbl 0435. 54021

[209] Kunen K. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs. Amsterdam: North-Holland, 1980. MR 82f: 03001. Zbl 0443. 03021

[210] Kunen K, Vaughan J E. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984. MR 85k: 54001. Zbl 0546. 00022

[211] Lašnev N. Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1965, **165**: 756–758. MR 33#703. Zbl 0145. 19603

[212] Lašnev N. Closed images of metric spaces (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1966, **170**: 505–507. MR 34#3547. Zbl 0153. 24203

[213] Lee K B. On certain g-first countable spaces. *Pacific J Math*, 1976, **65**(1): 113–118. MR 54#11286

[214] 李进金. 广义度量空间的几个反例. *数学研究*, 1995, **28**(4): 105–107. MR 1412277. Zbl 0913. 54026

[215] 李进金. 局部可分度量空间的映象及其相关结果 [博士学位论文]. 济南: 山东大学, 2000

[216] Li Jinjing (李进金). $\aleph$-spaces and σ-mappings. *Italian J Pure Applied Math*, 2005, **17**: 55–62. MR 2203461. Zbl 1098.54029

[217] Li Jinjin, Jiang Shouli, Tanaka Y. Point-countable k-networks and maps. *Questions Answers in General Topology*, 1999, **17**(1): 101–108. MR 2000a: 54029. Zbl 0939. 54017

[218] Lin Shou. On normal separable ℵ-spaces. *Questions Answers in General Topology*, 1987, **5**: 249–254. MR 0917881. Zbl 0633. 54003

[219] 林寿. K-半分层空间的注记. 苏州大学学报 (自然科学版), 1988, **4**: 357–363

[220] Lin Shou. On a generalization of Michael's theorem. 东北数学, 1988, **4**: 162–168. MR 90d: 54023. Zbl 0667. 54011

[221] Lin Shou. A study of pseudobases. *Questions Answers in General Topology*, 1988, **6**: 81–97. MR 89j: 54031. Zbl 0655. 54020

[222] Lin Shou. On a problem of K. Tamano. *Questions Answers in General Topology*, 1988, **6**: 99–102. MR 89e: 54025. Zbl 0648. 54026

[223] Lin Shou. Mapping theorems on ℵ-spaces. *Topology Appl*, 1988, **30**: 159–164. MR 89k: 54063. Zbl 0663. 54017

[224] Lin Shou. Spaces with a locally countable k-network. 东北数学, 1990, **6**: 39–44. MR 91e: 54078. Zbl 0704. 54017

[225] 林寿. Lašnev 空间的可数积. 数学进展, 1991, **20**: 192–194. MR 92d: 54041. Zbl 0736. 54025

[226] 林寿. 关于 M-空间的注记. 苏州大学学报 (自然科学版), 1991, **7**: 267–269

[227] 林寿. 关于 R-商、ss-映射. 数学学报, 1991, **34**: 7–11. MR 92i: 54019. Zbl 0760. 54009

[228] Lin Shou. On the quotient compact images of metric spaces. 数学进展, 1992, **21**: 93–96. MR 93c: 54024. Zbl 0786. 54011

[229] Lin Shou. A note on metrization theorem. 数学研究与评论, 1992, **12**: 153–155. MR 1161139. Zbl 0769. 54030

[230] 林寿. 关于 g-可度量空间. 数学年刊, 1992, **13A**: 403–409. MR 94b: 54087. Zbl 0770. 54030

[231] 林寿. σ-映射与 Alexandroff 问题. 见: 福建省科协首届青年学术年会论文集. 福州: 福建科学技术出版社, 1992, 5–8. MR 1252903. Zbl 0847. 54031

[232] Lin Shou. Spaces having σ-hereditarily closure-preserving k-networks. *Math Japonica*, 1992, **37**: 17–21. MR 92m: 54050. Zbl 0744. 54011

[233] Lin Shou. The sequence-covering s-images of metric spaces. 东北数学, 1993, **9**: 81–85. MR 94f: 54066. Zbl 0841. 54028

[234] 林寿. 关于 (mod$K$) 可度量空间. 数学杂志, 1993, **13**: 456–460. MR 1286670. Zbl 0849. 54020

[235] 林寿. 广义度量空间与映射 (第 1 版). 北京: 科学出版社, 1995. MR 96k: 54002. Zbl 0940. 54002

[236] Lin Shou. On the quotient images of normal metric spaces. *Math Japonica*, 1996, **43**: 483–485. MR 97d: 54052. Zbl 0864. 54010

[237] Lin Shou. A note on the Arens' space and sequential fan. *Topology Appl*, 1997, **81**: 185–196. MR 98m: 54008. Zbl 0885. 54019

[238] Lin Shou. Mapping theorems on k-semistratifiable spaces. *Tsukuba J Math*, 1997, **21**: 809–815. MR 99b: 54023. Zbl 1025. 54501

[239] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射. 北京: 科学出版社, 2002. MR 2003k: 54001. Zbl 1004. 54001

[240] Lin Shou. A note on sequence-covering mappings. *Acta Math Hungar*, 2005, **107**: 187–191. MR 2005m: 54053. Zbl 1081. 54025

[241] 林寿. 连通度量空间的映象. 数学年刊, 2005, **26A**: 345–350. MR 2006b: 54015. Zbl 1081. 54016

[242] Lin Shou. Covering properties of k-semistratifiable spaces. *Topology Proc*, 2005, **29**: 199–206. MR 2006m:54041. Zbl 1086.54017

[243] Lin Shou. A note on D-spaces. *Comment Math Univ Carolinae*, 2006, **47**(2): 313–316

[244] 林寿, 陈焕然. g-可度量空间的完备逆象. 数学进展, 1995, **24**: 338–341. MR 1358894. Zbl 0867. 54031

[245] Lin Shou, Li Zhaowen (李招文), Li Jinjin, Liu Chuan. On ss-mappings. 东北数学, 1993, **9**: 521–524. MR 94m: 54037. Zbl 0817. 54024

[246] Lin Shou, Liu Zhengshuai (刘正帅). A new characterization of developable spaces. 数学研究记事, 1993, **26**(2): 55–57

[247] Lin Shou, Tanaka Y. Point-countable k-networks, closed maps, and related results. *Topology Appl*, 1994, **59**: 79–86. MR 95e: 54019. Zbl 0817. 54025

[248] Lin Shou, Yan Li (严力). A note on spaces with a σ-compact-finite weak base. *Tsukuba J Math*, 2004, **28**: 85–91. MR 2082222. Zbl 1062. 54027

[249] 林寿, 燕鹏飞. 关于序列覆盖紧映射. 数学学报, 2001, **44**: 175–182. MR 2001m: 54030. Zbl 1005. 54031

[250] Lin Shou, Yan Pengfei (燕鹏飞). Notes on cfp-covers. *Comment Math Univ Carolinae*, 2003, **44**: 295–306. MR 2004i: 54039.Zb1 pre05053635

[251] 林寿, 周友成, 燕鹏飞. 关于序列覆盖 π 映像. 数学学报, 2002, **45**: 1157–1164. MR 2004a: 54036. Zbl 1024. 54020

[252] Liu Chuan. Spaces with a σ-compact finite k-network. *Questions Answers in General Topology*, 1992, **l0**: 81–87. MR 92m: 54057. Zbl 0748. 54007

[253] 刘川. 紧覆盖映射的一个注记. 广西大学学报 (自然科学版), 1993, **18**(4): 49–51

[254] Liu Chuan. Spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network. *Topology Proc*, 1993, **l8**: 179–188. MR 96c: 54049. Zbl 0821. 54018

[255] 刘川. 关于点可数覆盖. 数学研究与评论, 1996, **16**(1): 121–124. MR 1391382. Zbl 0866. 54026

[256] Liu Chuan. On weak bases. *Topology Appl*, 2005, **150**: 91–99. MR 2005k: 54048. Zbl 1081. 54026

[257] Liu Chuan. Notes on closed maps. *Houston J Math*, 2007, **33**: 249–259.

[258] Liu Chuan, Dai Mumin (戴牧民). g-metrizability and S_ω. *Topology Appl*, 1994, **60**: 185–189. MR 95j: 54018. Zbl 0806. 54025

[259] 刘川, 戴牧民. 度量空间的紧覆盖 s-像. 数学学报, 1996, **39**: 41–44. MR 1412902. Zbl 0865. 54014

[260] Liu Chuan, Ludwig L D. Nagata-Smirnov revisited: Spaces with σ-wHCP bases. *Topology Proc*, 2005, **29**(2): 559–565.MR2244489

[261] Liu Chuan, Tanaka Y. Spaces with certain compact-countable k-networks, and questions. *Questions Answers in General Topology*, 1996, **14**: 15–37. MR 1384050. Zbl 0847. 54032

[262] Liu Chuan, Tanaka Y. Spaces having σ-compact-finite k-networks, and related matters. *Topology Proc*, 1996, **21**: 173–200. MR 99c: 54036. Zbl 0896. 54018

[263] 刘应明. 一类包含弱仿紧空间和次仿紧空间的拓扑空间. 数学学报, 1977, **20**: 212–214. MR 80a: 54035. Zbl 0373. 54020

[264] 刘应明, 刘立榆. 附粘空间的度量化. 数学学报, 1979, **22**: 241–243. MR 80i: 54008. Zbl 0423. 54003

[265] Lutzer D J. Semimetrizable and stratifiable spaces. *General Topology Appl*, 1971, **1**: 43–48. MR 45#5952. Zbl 0211. 25704

[266] Mack J. Directed covers and paracompact spaces. *Canad J Math*, 1967, **19**: 649–654. MR 35#2263. Zbl 0147. 22805

[267] Mancuso V J. Inverse images and first countability. *General Topology Appl*, 1972, **2**: 29–44. MR 45#9298. Zbl 0234. 54003

[268] Martin H W. Metrizability of M-spaces. *Canad J Math*, 1973, **25**: 840–841. MR 48#7217. Zbl 0247. 54031

[269] Martin H W. Contractibility of topological spaces onto metric spaces. *Pacific J Math*, 1975, **61**: 209–217. MR 53#14432. Zbl 0304. 54026

[270] Martin H W. Weak bases and metrization. *Trans Amer Math Soc*, 1976, **222**: 337–344. MR 54#11290. Zbl 0341. 54039

[271] McAuley L F. On semi-metric spaces. In:Summer Institute on Set Theoretic Topology, Wisconsin, 1955. 1958, 58–62

[272] McAuley L F. A relation between perfect separability, completeness, and normality in semi-metric spaces. *Pacific J Math*, 1956, **6**: 315–326. MR 18, 325c. Zbl 0072. 17802

[273] McAuley L F. A note on complete collectionwise normality and paracompactness. *Proc Amer Math Soc*, 1958, **9**: 796–799. MR 20#6086. Zbl 0109. 15301

[274] Michael E A. A note on paracompact spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1953, **4**: 831–838. MR 15, 144b. Zbl 0052. 18701

[275] Michael E A. Another note on paracompact spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1957, **8**: 822–828. MR 19, 299c. Zbl 0078. 14805

[276] Michael E A. Yet another note on paracompact spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1959, **10**: 309–314. MR 21#4406. Zbl 0092. 15403

[277] Michael E A. A theorem on semi-continuous set-valued functions. *Duke Math J*, 1959, **26**: 647–651. MR 22#229. Zbl 0151. 30805

[278] Michael E A. The product of a normal space and a metric space need not be normal. *Bull Amer Math Soc*, 1963, **69**: 375–376. MR 27#2956. Zbl 0114. 38904

[279] Michael E A. A note on closed maps and compact sets. *Israel J Math*, 1964, **2**: 173–176. MR 31#1659. Zbl 0136. 19303

[280] Michael E A. $\aleph_0$-spaces. *J Math Mech*, 1966, **15**: 983–1002. MR 34#6723. Zbl 0148. 16701

[281] Michael E A. Bi-quotient maps and Cartesian products of quotient maps. *Ann Inst Fourier Grenoble*, 1968, **18**: 287–302. MR 39#6277. Zbl 0175. 19704

[282] Michael E A. On Nagami's Σ-spaces and some related matters. *Proc Washington State Univ Topological Conf*, 1970, 13–19. MR 42#1067. Zbl 0195. 24503

[283] Michael E A. Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable cartesian products. *Compositio Math*, 1971, **23**: 199–214. MR 44#4706. Zbl 0216. 44304

[284] Michael E A. On representing spaces as images of metrizable and related spaces. *General Topology Appl*, 1971, **1**: 329–343. MR 45#2681. Zbl 0227. 54009

[285] Michael E A. A quintuple quotient quest. *General Topology Appl*, 1972, **2**: 91–138. MR 46#8156. Zbl 0238. 54009

[286] Michael E A. $\aleph_0'$-spaces and a function space theorem of R. Pol. *Indiana Univ Math J*, 1977, **26**: 299–306. MR 55#6352. Zbl 0327. 54013

[287] Michael E A. σ-locally finite maps. *Proc Amer Math Soc*, 1977, **65**: 159–164. MR 56#1253. Zbl 0356. 54034

[288] Michael E A. A problem. In: Baayen P C, van Mill J eds. Topological Structures II. *Proc of Symp on Topology and Geometry*, Amsterdam, 1978. Mathematical Centre Tracts, 115. Amsterdam, 1979, 165–166. MR 81a: 54001a. Zbl 0413. 00020

[289] Michael E A, Nagami K. Compact-covering images of metric spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1973, **37**: 260–266. MR 46#6269. Zbl 0228. 54008

[290] Micheal E A, Olson R C and Siwiec F. A-spaces and countably bi-quotient maps. *Dissertationes Math*, 1976, **33**: 1–43. MR 54#6067. Zbl 0338. 54006

[291] van Mill J, Reed G M. Open Problems in Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1990. MR 92c: 54001. Zbl 0718. 54001

[292] Miščenko A S. Spaces with a pointwise denumerable basis (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1962, **144**: 985–988. MR 25#1537. Zbl 0122. 17304

[293] Mizokami T. On the closed images of a developable space. *Houston J Math*, 1993, **19**(3): 455–467. MR 94i: 54059. Zbl 0784. 54030

[294] Mizokami T. On closed subsets of M_1-spaces. *Topology Appl*, 2004, **141**: 197–206. MR 2005g: 54052. Zbl 1058. 54013

[295] Mizokami T, Shimane N. On the M_3 versus M_1 problem. *Topology Appl*, 2000, **105**: 1–13. MR 2001f: 54032. Zbl 0954. 54011

[296] Moody P J. Concerning the Collins, Reed, Roscoe, Rudin metrisation theorem. *Bull London Math Soc*, 1993, **25**: 476–480. MR 94h: 54034. Zbl 0789. 54039

[297] Moody P J, Reed G M, Roscoe A W, Collins P J. A lattice of conditions on topological spaces II. *Fund Math*, 1991, **138**: 69–81. MR 92e: 54024. Zbl 0745. 54008

[298] Moore R L. On the foundations of plane analysis situs. *Trans Amer Math Soc*, 1916, **17**(2): 13l–164. MR 1501033. JFM 46. 0828. 02

[299] Morita K. On the simple extension of a space with respect to a uniformity, IV. *Proc Japan Acad*, 1951, **27**: 632–636. MR 14, 571e. Zbl 0045. 11702

[300] Morita K. On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. *Proc Japan Acad*, 1953, **29**: 537–543. MR 15, 977b. Zbl 0053. 12405

[301] Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Math Ann*, 1964, **154**: 365–382. MR 29#2773. Zbl 0117. 39803

[302] Morita K. Some properties of M-spaces. *Proc Japan Acad*, 1967, **43**: 869–872. MR 37#3517. Zbl 0153. 52403

[303] Morita K. Some problems on normality of products of spaces. In: *Proc 4th Prague Topology Symp*, Prague, 1976. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Part B, 1977, 296–297. MR 58#2715. Zbl 0374. 54004

[304] Morita K, Hanai S. Closed mappings and matric spaces. *Proc Japan Acad*, 1956, **32**: 10–14. MR 19, 299a. Zbl 0073. 17803

[305] Morita K, Nagata J. Topics in General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1989. MR 91a: 54001. Zbl 0684. 00017

[306] Morita K, Rishel T. Results related to closed images of M-spaces I, II. *Proc Japan Acad*, 1971, **47**: 1004–1011. MR 46#9936. Zbl 0254. 54038; Zbl 0254. 54039

[307] Mrówka S G. On completely regular spaces. *Fund Math*, 1954, **41**: 105–106. MR 16, 157b. Zbl 0055. 41304

[308] Mrówka S G. On normal metrics. *Amer Math Monthly*, 1965, **72**: 998–1001. MR 32#1677. Zbl 0132. 18302

[309] Nagami K. Σ-spaces. *Fund Math*, 1969, **65**: 169–192. MR 41#2612. Zbl 0181. 50701

[310] Nagami K. Ranges which enable open maps to be compact-covering. *General Topology Appl*, 1973, **3**: 355–367. MR 49#9794. Zbl 0278. 54011

[311] Nagata J. On a necessary and sufficient condition of metrizability. *J Inst Polyt Osaka City Univ*, 1950, **1**: 93–100. MR 13, 264e. Zbl 0041. 09801

[312] Nagata J. Mappings and M-spaces. *Proc Japan Acad*, 1969, **45**: 140–144. MR 39#4813. Zbl 0188. 28101

[313] Nagata J. Characterizations of some generalized metric spaces. *Notices Amer Math Soc*, 1971, **18**: 71T–G151

[314] Nagata J. A survey of the theory of generalized metric spaces. In: *Proc 3th Prague Topological Symp*, Prague, 1971. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra III, 1972, 321–331. MR 50#8446. Zbl 0307. 54025

[315] Nagata J. On closed mappings of generalized metric spaces. *Proc Japan Acad*, 1971, **47**: 181–184. MR 47#1033. Zbl 0225. 54010

[316] Nagata J. Modern Dimension Theory. Berlin: Heldermann Verlag, 1983. Zbl 0518. 54002

[317] Nagata J. Modern General Topology. 2nd rev de. North-Holland Math Library,33.Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V,1985. MR 87g:54003.Zbl 0598.54001

[318] Nagata J. Metrizability, generalized metric spaces and g-functions. *Comment Math Univ Carolinae*, 1988, **29**(4): 715–722. MR 90d: 54060

[319] Nagata J. Generalized metric spaces I. In: Morita K, Nagata J eds. Topics in General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1989, 315–366. MR 91e: 54071. Zbl 0684. 00017

[320] Nagata J. Remarks on metrizability and generalized metric spaces. *Topology Appl*, 1999, **91**: 71–77. MR 2000c: 54022. Zbl 0926. 54019

[321] Nyikos P J. Problem section, classic problem IV. *Topology Proc*, 1976, **1**: 365.

[322] Nyikos P J. Classic problems. In: Pearl E ed. Problems from Topology Proceedings. Toronta: Topology Atlas, 2003, 69–89

[323] Okuyama A. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces. *Sci Rep Tokyo Kyoiku Daigaku*, 1968, **A9**: 236–254. MR 37#5846. Zbl 0153. 52404

[324] Okuyama A. On a generalization of Σ-spaces. *Pacific J Math*, 1972, **42**: 485–495. MR 47#2547. Zbl 0219. 54018

[325] O'Meara P. A new class of topological spaces. University of Alberta Dissertation, 1966

[326] O'Meara P. On paracompactness in function spaces with the compact open topology. *Proc Amer Math Soc*, 1971, **29**: 183-189. MR 43#2659. Zbl 0214. 21105

[327] Patsei I P. The σ-product of strong $\Sigma^\sharp$-spaces (in Russian). *Vestnik Moskov Univ Mat*, 1986, **39**(2): 87–89. MR 87k: 54054. Zbl 0612. 54022

[328] Pearl E. Problems from Topology Proceedings. Toronta: Topology Atlas, 2003

[329] Pearl E. Open Problems in Topology II. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2007

[330] Peng Liangxue (彭良雪). The decomposition theorem for Σ^*-spaces with G_δ-points. 数学进展, 2004, **33**: 110–114. MR 2058449

[331] Peng Liangxue. On Σ^*-spaces and strong Σ^*-spaces of countable pseudocharacter. *Topology Appl*, 2005, **148**: 233–238. MR 2005k: 54040. Zbl 1062. 54026

[332] 彭良雪, 林寿. 关于 Σ^*-空间的一点注记. 数学进展, 2000, **29**: 354–356. MR 1853859. Zbl 0997. 54040

[333] Ponomarev V I. Axioms of countability and continuous mappings (in Russian). *Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys*, 1960, **8**: 127–134. MR 22#7109. Zbl 0095. 16301

[334] Popov V. A perfect map need not preserved a G_δ-diagonal. *General Topology Appl*, 1977, **7**: 31–33. MR 55#4095. Zbl 0343. 54035

[335] Potoczny H B. A non-paracompact space which admits a closure-preserving cover of compact sets. *Proc Amer Math Soc*, 1972, **32**: 309–311. MR 44#5923. Zbl 0208. 50802

[336] Przymusiński T C. Products of normal spaces. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984, 781–826. MR 86c: 54007. Zbl 0559. 54009

[337] Reed G M. On subspaces of separable first countable T_2-spaces. *Fund Math*, 1976, **91**: 189–202. MR 54#13863. Zbl 0341. 54016

[338] Reed G M, Zenor P L. Metrization of Moore spaces and generalized manifolds. *Fund Math*, 1976, **91**: 203–210. MR 54#13868. Zbl 0339. 54030

[339] Rudin M E. A normal space X for which $X \times \mathbb{I}$ is not normal. *Fund Math*, 1971/72, **73**: 179–186. MR 45#2660. Zbl 0224. 54019

[340] Rudin M E. The normality of products with one compact factor. *General Topology Appl*, 1975, **5**: 45–59. MR 50#14656. Zbl 0296. 54004

[341] Rudin M E. Lecture on Set Theoretic Topology. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Math, 23, Providence, 1975. MR 51#4128. Zbl 0318. 54001

[342] Rudin M E. κ-Dowker spaces. *Czech Math J*, 1978, **28**: 324–326. MR 57#17588. Zbl 0383. 54012

[343] Rudin M E. The shrinking property. *Canad Math Bull*, 1983, **26**: 385–388. MR 85h: 54040. Zbl 0536. 54013

[344] Rudin M E, Starbird M. Products with a metric factor. *General Topology Appl*, 1975, **5**: 235–248. MR 52#1606. Zbl 0305. 54010

[345] Sakai M. Remarks on spaces with special type of k-networks. *Tsukuba J Math*, 1997, **21**: 443–448. MR 98g: 54045. Zbl 0886. 54023

[346] Sconyers W B. Metacompact spaces and well-ordered open coverings. *Notices Amer Math Soc*, 1970, **17**: 230–230

[347] Shibakov A. On spaces with point-countable k-networks and their mappings. *Serdica Math J*, 1994, **20**(1): 48–55. MR 95h: 54020. Zbl 0827. 54015

[348] Shiraki T. M-spaces, their generalization and metrization theorems. *Sci Rep Tokyo Kyoiku Daigaku A*, 1971, **11**: 57–67. MR 46#4495. Zbl 0233. 54016

[349] Singal M K, Arya S P. Weak topology sum theorems. In: Császár Á ed. Topology. *Colloq Math Soc János Bolyai*, 23, Budapest (Hungary), 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980, 1095–1109. MR 82e: 54033. Zbl 0449. 54007

[350] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings. *General Topology Appl*, 1971, **1**: 143–154. MR 44#5933. Zbl 0218. 54016

[351] Siwiec F. On defining a space by a weak base. *Pacific J Math*, 1974, **52**: 233–245. MR 50#3198. Zbl 0285. 54022

[352] Siwiec F, Nagata J. A note on nets and metrization. *Proc Japan Acad.*, 1968, **44**: 623–727. MR 39#3450. Zbl 0181. 25902

[353] Slaughter Jr F G. The closed image of a metrizable space is M_1. *Proc Amer Math Soc*, 1973, **37**: 309–314. MR 46#9930. Zbl 0255. 54024

[354] Smirnov Yu. On metrization of topological spaces (in Russian). *Uspechi Mat Nauk*, 1951, **6**(6): 100–111. MR 14, 70a. Zbl 0045. 11704

[355] Smirnov Yu. On the metrizability of bicompacts decomposable into a sum of sets with countable bases (in Russian). *Fund Math*, 1956, **43**: 387–393. MR 18, 813d. Zbl 0071. 38401

[356] Smith J C. Properties of weak $\overline{\theta}$-refinable spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1975, **53**: 511–517. MR 52#1628. Zbl 0338. 54013

[357] Smith J C, Krajewski L L. Expandibility and collectionwise normality. *Trans Amer Math Soc*, 1971, **160**: 437–451. MR 44#2190. Zbl 0224. 54020

[358] Šneĭder V E. Continuous images of Suslin and Borel sets, metrization theorems (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1945, **50**: 77–79. MR 14, 782d. Zbl 0061. 39705

[359] Sorgenfrey R H. On the topological product of paracompact spaces. *Bull Amer Math Soc*, 1947, **53**: 631–632. MR 8, 594f. Zbl 0031. 28302

[360] Steen L A, Seebach Jr J A. Counterexamples in Topology (Second Edition). New York: Springer-Verlag, 1978 (New York: Dover Publications Inc, 1995). MR 80a: 54001. Zbl 0386. 54001

[361] Stoltenberg R A. A note on stratifiable spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1969, **23**: 294–297. MR 39#6245. Zbl 0183. 27204

[362] Stone A H. Paracompactness and product spaces. *Bull Amer Math Soc*, 1948, **54**: 977–982. MR 10, 204c. Zbl 0032. 31403

[363] Stone A H. Metrizability of decomposition spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1956, **7**: 690–700. MR 19, 299b. Zbl 0071. 16001

[364] Stone A H. Metrisability of union of spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1959, **10**: 361–366. MR 21#4410. Zbl 0090. 38705

[365] Svetlichny S A. Open mappings of submetrizable spaces (in Russian). *Vestnik Moskov Univ Mat*, 1988, **43**(6): 18–20. MR 90h: 54021. Zbl 0689. 54005

[366] Sun Shuhao (孙叔豪). The class of $\aleph$-spaces is invariant of closed mappings with Lindelöf fibers. *Comment Math Univ Carolina*, 1988, **29**: 351–354. MR 90d: 54026. Zbl 0656. 54021

[367] Suzuki J. On pre-σ-spaces. *Bull Tokyo Gakugei Univ IV Ser*, 1976, **28**: 22–32. MR 55#6349. Zbl 0345. 54011

[368] Tamano H. On compactifications. *J Math Kyoto Univ*, 1962, **l**: 161–193. MR 25#5489. Zbl 0106. 15601

[369] Tamano H. A characterization of paracompactness. *Fund Math*, 1971, **72**: 189–201. MR 45#5956. Zbl 0224. 54022

[370] Tamano K. Closed images of metric spaces and metrization. *Topology Proc*, 1985, **10**: 177–186. MR 87j: 54011. Zbl 0616. 54026

[371] Tamano K. Generalized metric spaces II. In: Morita K, Nagata J eds. Topics in General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1989, 367–409. MR 91e: 54074. Zbl 0698. 54024

[372] Tamano K. Definitions of Σ-spaces. *Topology Proc*, 1997, **22**(Summer): 529–532. MR 2000g: 54051. Zbl 0945. 54021

[373] Tanaka Y. On open finite-to-one maps. *Bull Tokyo Gakugei Univ IV Ser*, 1973, **25**: 1–13. MR 49#11455. Zbl 0355. 54008

[374] Tanaka Y. Closed maps on metric spaces. *Topology Appl*, 1980, **11**: 87–92. MR 82k: 54017. Zbl 0436. 54010

[375] Tanaka Y. Metrizability of certain quotient spaces. *Fund Math*, 1983, **119**: 157–168. MR 86c: 54028. Zbl 0542. 54022

[376] Tanaka Y. Point-countable covers and k-networks. *Topology Proc*, 1987, **12**: 327–349. MR 90e: 54060. Zbl 0676. 54035

[377] Tanaka Y. Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces. *Math Japonica*, 1991, **36**: 71–84. MR 92d: 54018. Zbl 0732. 54023

[378] Tanaka Y. σ-hereditarily closure-preserving k-networks and g-metrizability. *Proc Amer Math Soc*, 1991, **112**: 283–290. MR 91h: 54046. Zbl 0770. 54031

[379] Tanaka Y. Closed maps and symmetric spaces. *Questions Answers in General Topology*, 1993, **11**(2): 215–233. MR 94h: 54014. Zbl 0788. 54033

[380] Tanaka Y, Li Zhaowen. Certain covering-maps and k-networks, and ralated matters. *Topology Proc*, 2003, **27**: 317–334. MR 2005a: 54021. Zbl 1075. 54010

[381] Tanaka Y, Liu Chuan. Fiber properties of closed maps, and weak topology. *Topology Proc*, 1999, **24**(Spring): 323–344. MR 1802696. Zbl 0965. 54019

[382] Tanaka Y, Murota T. Generalizations of wΔ-spaces, and developable spaces. *Topology Appl*, 1998, **82**(1-3): 439–452. MR 99c: 54011. Zbl 0891. 54011

[383] Tanaka Y, Yajima Y. Decompositions for closed maps. *Topology Proc*, 1985, **10**: 399–411. MR 88a: 54032. Zbl 0613. 54003

[384] Teng Hui (滕辉). On a problem of Y. Yajima. *Topology Appl*, 1991, **38**: 39–43. MR 92d: 54009. Zbl 0714. 54006

[385] 滕辉, 夏省祥, 林寿. 某些广义可数紧空间的闭映象. 数学年刊, 1989, **10A**: 554–558. MR 91e: 54058. Zbl 0705. 54015

[386] Tkachuk V V. When do connected spaces have nice connected preimages. *Proc Amer Math Soc*, 1998, **126**: 3437–3446. MR 99a: 54015. Zbl 0903. 54004

[387] Todorčevič S. A topology on sequences of countable ordinals. *Bull Pol Acad Sci, Math*, 1991, **39**(1-2): 137–140. MR 93k: 54005. Zbl 0780. 54035

[388] Tukey J M. Convergence and Uniformity in Topology. Ann Math Studies, 2. Princeton, 1940. MR 2, 67a. Zbl 0025. 09102

[389] Uspenskii V V. Pseudocompact spaces with a σ-point-finite base are metrizable. *Comment Math Univ Carolina*, 1984, **25**: 261–264. MR 87f: 54035. Zbl 0574. 54021

[390] Vaĭnšteĭn I A. On closed mappings of metric spaces (in Russian). *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1947, **57**: 319–321. MR 9, 153b

[391] Veličko N V. Symmetrizable spaces (in Russian). *Mat Zametki*, 1972, **12**(5): 577–582. MR 48#5021

[392] Veličko N V. Quotient spaces of metrizable spaces (in Russian). *Sibirskii Mat Zhurnal*, 1987, **28**(4): 73–81. MR 88g: 54016. Zbl 0683. 54032

[393] Wang Shutang (王成堂). Remarks on ω_μ-additive spaces. *Fund Math*, 1964, **55**: 101–112. MR 29#4022. Zbl 0135. 40901

[394] Wicke H H. On the Hausdorff open continuous images of Hausdorff paracompact p-spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1969, **22**: 136–140. MR 39#4801. Zbl 0176. 51801

[395] Willard S. Metric spaces all of whose decompositions are metric. *Proc Amer Math Soc*, 1969, **21**: 126–128. MR 39#919. Zbl 0174. 25802

[396] Wilson W A. On semi-metric spaces. *Amer J Math*, 1931, **53**: 361–373. MR 1506824. Zbl 0001. 22804

[397] Worrell Jr J M. Upper semicontinuous decompositions of developable spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1965, **16**: 485–490. MR 31#6207. Zbl 0132. 18305

[398] Worrell Jr J M. The closed continuous images of metacompact topological spaces. *Portug Math*, 1966, **25**: 175–179. MR 38#676. Zbl 0171. 21303

[399] Worrell Jr J M. Paracompactness as a relaxation of full normality. *Notices Amer Math Soc*, 1968, **15**: 661–661

[400] Worrell Jr J M, Wicke H H. Characterizations of developable topological spaces. *Canad J Math*, 1965, **17**: 820–830. MR 32#427. Zbl 0132. 18401

[401] 吴利生. 关于 K-半分层空间. 苏州大学学报 (自然科学版), 1983, (1): 1–4

[402] Yajima Y. On Σ-products of Σ-spaces. *Fund Math*, 1984, **123**: 29–37. MR 86d: 54035. Zbl 0556. 54008

[403] 燕鹏飞. 度量空间的紧映象. 数学研究, 1997, **30**(2): 185–187, 198. MR 1468151. Zbl 0918. 54029

[404] 燕鹏飞, 江守礼. 关于紧覆盖 π 映射. 数学杂志, 2004, **24**: 429–432. MR 2005g: 54025. Zbl 1053. 54534

[405] 燕鹏飞, 林寿. 度量空间的紧覆盖 s 映射. 数学学报, 1999, **42**: 241–244. MR 1701751. Zbl 1011. 54029

[406] Yang, Chung-Tao (杨忠道). On paracompactness spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1954, **5**: 185–189. MR 15, 976d. Zbl 0055. 41401

[407] Yun Ziqiu. On a problem of J. Nagata. *Comment Math Univ Carolinae*, 1989, **30**(4): 811–815. MR 91b: 54059. Zbl 0692. 54017

[408] Yun Ziqiu. On point-countable closed k-network. *Questions Answers in General Topology*, 1989, **7**: 139–140. MR 90m: 54032. Zbl 0714. 54007

[409] Yun Ziqiu. A new characterization of $\aleph$-spaces. *Topology Proc*, 1991, **16**: 253–256. MR 94c: 54046. Zbl 0784. 54029

[410] Yun Ziqiu. On closed mappings. *Houston J Math*, 2005, **31**: 193–197. MR 2005k: 54045. Zbl 1069. 54020

[411] Yun Ziqiu, Junnila H J K. On a special metric. *Houston J Math*, 2000, **26**(4): 877-882. MR 2001k: 54048. Zbl 0973. 54030

索　引